



# Sensibilité et inversion de formes d'ondes complètes en milieu poreux stratifié.

Louis de Barros

## ► To cite this version:

Louis de Barros. Sensibilité et inversion de formes d'ondes complètes en milieu poreux stratifié.. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2007. Français. NNT: . tel-00204917

**HAL Id: tel-00204917**

**<https://theses.hal.science/tel-00204917>**

Submitted on 15 Jan 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

OBSERVATOIRE DE GRENOBLE

LABORATOIRE DE GEOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE

## THÈSE

---

# Sensibilité et inversion des formes d'ondes sismiques en milieu poreux stratifié

---

présentée par

**Louis DE BARROS**

pour obtenir le titre de

**Docteur de l'université Joseph Fourier - Grenoble I**

**Spécialité : Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement**

### Composition du Jury :

Pierre Adler	Rapporteur	DR CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Paris
Jean-Louis Auriault	Examineur	Prof., Université Joseph Fourier, Grenoble
Michel Dietrich	Directeur de thèse	DR CNRS, Université Joseph Fourier, Grenoble
Dominique Gibert	Rapporteur	Prof., Université Rennes 1, Rennes
Helle Pedersen	Directeur de thèse	MdC, Université Joseph Fourier, Grenoble
Patrick Rasolofosaon	Examineur	IR, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison
Jean Virieux	Examineur	Prof., Université Joseph Fourier, Grenoble

Date de soutenance : 03 décembre 2007



# Remerciements

Merci à toutes les personnes qui m'ont accueilli au sein du LGIT et de l'école doctorale ; merci pour les bonnes conditions de travail humaines et matérielles.

Merci à tous ceux qui ont suivi ou se sont intéressés à mon travail, qui ont su m'aider par de judicieux conseils et de précieux encouragements.

Merci à ceux qui m'ont permis de partir et accompagnés en missions (Soufrière de Guadeloupe, Aknes-Norvège, Puy des Goules,...). Merci pour les congrès, les écoles d'été et conférences ; merci pour la culture scientifique offerte.

Merci de m'avoir permis de m'initier à l'enseignement durant ma thèse et de me perfectionner lors de mon poste d'ATER.

Merci pour l'aide à la résolution des problèmes informatiques, administratifs ou techniques. Un grand merci pour l'entraide étudiante.

Merci à tous ceux avec qui j'ai passé des moments agréables et intéressants, au sein du laboratoire ou d'une association, sur une montagne, autour d'un verre ou d'un repas...

Merci à tous ceux qui m'ont donné la motivation pour venir travailler et merci à tous ceux qui m'ont fait oublier mon travail.

Merci à tous ceux qui ont lu ou qui liront ce travail. Merci pour leurs commentaires.





# Résumé

## Sensibilité et inversion de formes d'ondes complètes en milieu poreux stratifié.

La détermination des paramètres d'un milieu poreux, notamment la porosité, la perméabilité et les propriétés du fluide saturant est un enjeu important pour des problèmes hydrologiques, pétroliers ou de risques naturels. L'objectif principal de ce travail est d'estimer ces propriétés à partir des ondes sismiques réfléchies.

De nombreux paramètres mécaniques entrent en jeu pour caractériser les milieux poreux et les ondes sismiques en présence ont des propriétés particulières (deux ondes de compression, atténuation intrinsèque,...). Les équations de Biot sont résolues pour un milieu poreux stratifié plan saturé par un fluide homogène par une méthode de réflectivité associée à une intégration en nombre d'ondes discrets.

Ce programme de simulation est tout d'abord utilisé pour estimer la sensibilité des ondes réfléchies à la localisation et à la concentration de dioxyde de carbone dans un stockage géologique profond. La sensibilité de la réponse sismique aux différents paramètres du milieu poreux est ensuite établie de manière plus systématique par le calcul analytique des dérivées de Fréchet des sismogrammes et leur mise en oeuvre numérique à l'aide des fonctions de Green du milieu non perturbé. Les applications numériques réalisées indiquent que les paramètres primordiaux à déterminer sont la porosité et la consolidation.

Ces opérateurs de sensibilité obtenus ont ensuite été intégrés dans un code d'inversion de formes d'ondes complètes (algorithme de Quasi-Newton). Les calculs d'inversion réalisés à partir de données synthétiques indiquent que les distributions de porosité et les paramètres caractérisant le solide et le fluide (densité et modules mécaniques) peuvent être correctement reconstruits lorsque les autres paramètres sont bien déterminés.

Cependant, l'inversion de plusieurs paramètres reste un problème difficile du fait des couplages sismiques existant entre eux. Il est cependant possible de résoudre des problèmes complexes en ne considérant qu'un seul paramètre pour le fluide (saturation) et un pour les minéraux (lithologie), ou en effectuant des inversions différentielles pour suivre des variations du fluide.

La méthode d'inversion est finalement appliquée à un jeu de données réelles acquis sur le site côtier de Maguelonne dans l'Hérault. Les variations du milieu peuvent être reconstruites en utilisant de l'information *a priori* venant de forages.

### Mots clefs

Ondes sismiques, Milieu poreux, Modélisation numérique, Stockage de CO<sub>2</sub>, Opérateurs de sensibilité, Inversion de formes d'ondes complètes, Quasi-Newton, Estimation des propriétés des fluides et de la lithologie

# Abstract

## Sensitivity and inversion of full seismic waveforms in stratified porous medium.

Characterization of porous media parameters, and particularly the porosity, permeability and fluid properties are very useful in many applications (hydrologic, natural hazards or oil industry). The aim of my research is to evaluate the possibility to determine these properties from the full seismic wave fields.

First, I am interested in the useful parameters and the specific properties of the seismic waves in the poro-elastic theory, often called Biot (1956) theory. I then compute seismic waves propagation in fluid saturated stratified porous media with a reflectivity method coupled with the discrete wavenumber integration method. I first used this modeling to study the possibilities to determine the carbon dioxide concentration and localization thanks to the reflected P-waves in the case of the deep geological storage of Sleipner (North Sea). The sensitivity of the seismic response to the poro-elastic parameters are then generalized by the analytical computation of the Fréchet derivatives which are expressed in terms of the Green's functions of the unperturbed medium. The numerical tests show that the porosity and the consolidation are the main parameters to invert.

The sensitivity operators are then introduced in an inversion algorithm based on iterative modeling of the full waveform. The classical algorithm of generalized least-square inverse problem is solved by the quasi-Newton technique (Tarantola, 1984). The inversion of synthetic data show that we can invert for the porosity and the fluid and solid parameters (densities and mechanical modulus, or volumic rate of fluid and mineral) can be correctly rebuilt if the other parameters are well known.

However, the strong seismic coupling of the porous parameters leads to difficulties to invert simultaneously for several parameters. One way to get round these difficulties is to use additional information and invert for one single parameter for the fluid properties (saturating rate) or for the lithology. Another way is to realize differential inversion, to estimate the model variations.

Finally, I apply this algorithm on real data recorded on a Mediterranean coastal site. I can reconstruct a lithological model if I use additional informations from drilling measure.

**Key words :** Seismic waves, Porous media, Numerical simulation,  $CO_2$  storage, Sensitivity operators, Full waveform inversion, Quasi-Newton algorithms, fluid and stratigraphic characterisation.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>2</b>
<b>Résumé</b>	<b>4</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Tables des matières</b>	<b>6</b>
<b>Introduction</b>	<b>12</b>
 <b>I Modélisation d’ondes sismiques en milieu poreux</b>	 <b>17</b>
<b>1 Présentation des milieux poreux</b>	<b>19</b>
1.1 Introduction . . . . .	19
1.2 Paramètres poro-élastiques . . . . .	20
1.2.1 Porosité . . . . .	20
1.2.2 Circulation des fluides interstitiels . . . . .	22
1.2.3 Caractéristiques de la fraction fluide . . . . .	25
1.2.4 Caractéristiques de la fraction solide . . . . .	27
1.2.5 Caractéristiques du milieu poreux . . . . .	30
1.2.6 Relations de Gassmann (1951) : . . . . .	32
1.3 Ondes mécaniques en milieu poreux : Théorie de Biot (1956) . . . . .	32
1.3.1 Changement d’échelle et hypothèses . . . . .	33
1.3.2 Théorie de la poro-élastodynamique . . . . .	34
1.3.3 Propriétés des ondes sismiques en milieu poreux . . . . .	35
1.3.4 Atténuation et dispersion des ondes dans la théorie de Biot (1956). . . . .	37
1.3.5 Sensibilité de la vitesse et de l’atténuation . . . . .	39
1.4 Ondes mécaniques dans des théories plus complexes : expliquer l’atténuation ?	42
1.4.1 Théorie de la double porosité . . . . .	42
1.4.2 Atténuation par empilement de couches minces . . . . .	45
1.4.3 Mécanisme de “squirt flow” . . . . .	46
1.4.4 Atténuation en milieu non saturé . . . . .	46
1.4.5 Autres sources d’atténuation . . . . .	47

1.4.6	Conclusion . . . . .	48
1.5	Conclusion . . . . .	48
<b>2</b>	<b>Modélisation de la propagation des ondes en milieu poro-élastique</b>	<b>51</b>
2.1	Introduction . . . . .	51
2.2	Modélisation des ondes sismiques par les techniques de Kennett [1979] et Bouchon [1977] . . . . .	53
2.2.1	Nouvelle écriture des équations de Biot (1956) . . . . .	53
2.2.2	Potentiels des déplacements et contraintes . . . . .	55
2.2.3	Termes de sources . . . . .	57
2.2.4	Coefficients de réflexion-transmission en milieu poreux . . . . .	58
2.2.5	Réponse d'un milieu stratifié plan . . . . .	61
2.2.6	Transformation dans le domaine temps-distance . . . . .	63
2.3	Modélisation numérique de sismogrammes en milieu poro-élastique stratifié plan : Vérifications . . . . .	64
2.3.1	Relations de réciprocité . . . . .	64
2.3.2	Comportement haute-fréquence et onde P-lente . . . . .	67
2.3.3	Atténuation et double porosité . . . . .	69
2.4	Conclusion . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Application à la surveillance du stockage de CO<sub>2</sub></b>	<b>71</b>
3.1	Introduction . . . . .	71
3.2	Caractéristiques du fluide . . . . .	73
3.2.1	Caractéristiques du CO <sub>2</sub> . . . . .	73
3.2.2	Caractéristiques de l'eau douce et salée . . . . .	75
3.2.3	Caractéristiques de l'eau salée contenant du CO <sub>2</sub> dissous . . . . .	76
3.2.4	Caractéristiques du mélange biphasique eau salée et CO <sub>2</sub> . . . . .	78
3.3	Cas du stockage de Sleipner . . . . .	79
3.3.1	Présentation du site . . . . .	79
3.3.2	Modélisation des ondes sismiques réfléchies par la formation Utsira . . . . .	82
3.3.3	Sensibilité à la concentration en CO <sub>2</sub> . . . . .	84
3.3.4	Sensibilité à la répartition du CO <sub>2</sub> . . . . .	85
3.3.5	Influence de la dissolution et précipitation des carbonates . . . . .	87
3.4	Conclusion . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Sensibilité du champ d'ondes aux paramètres des milieu poreux</b>	<b>91</b>
4.1	Introduction . . . . .	92
4.2	Wave propagation in stratified porous media . . . . .	94
4.2.1	Governing equations . . . . .	94
4.2.2	Coupled second-order equations for plane waves . . . . .	96
4.3	Fréchet derivatives of the plane wave reflectivity . . . . .	98

4.3.1	Statement of the problem . . . . .	98
4.3.2	Perturbation analysis . . . . .	99
4.3.3	Fréchet derivatives for relevant parameters . . . . .	101
4.3.4	<b>SH</b> case . . . . .	103
4.4	Numerical simulations and accuracy tests . . . . .	105
4.4.1	Fréchet derivatives <i>vs</i> discrete perturbations . . . . .	105
4.4.2	Uniform medium . . . . .	105
4.4.3	Complex model . . . . .	108
4.5	Sensitivity study . . . . .	111
4.5.1	Relative influence of the model parameters . . . . .	111
4.5.2	Amplitude of the perturbation seismograms versus angle of incidence	112
4.6	Conclusions . . . . .	113
<b>II</b>	<b>Inversion d'ondes sismiques en milieu poreux</b>	<b>115</b>
<b>5</b>	<b>Introduction et formulation du problème inverse</b>	<b>117</b>
5.1	Introduction . . . . .	117
5.1.1	Comment imager la sub-surface ? . . . . .	117
5.1.2	Quelle information transportent les ondes sismiques ? . . . . .	119
5.1.3	Quantifier les paramètres poro-élastiques par la sismique réflexion .	120
5.2	Algorithmes d'inversion . . . . .	122
5.2.1	Définitions . . . . .	122
5.2.2	Schéma général de l'algorithme d'inversion . . . . .	125
5.2.3	Méthodes de gradient et gradient conjugué . . . . .	126
5.2.4	Méthodes de Newton . . . . .	128
5.2.5	Covariance et norme $H^1$ . . . . .	129
5.2.6	Covariance <i>a posteriori</i> , erreurs . . . . .	131
5.3	Conclusion . . . . .	132
<b>6</b>	<b>Applications de l'algorithme d'inversion sur des données synthétiques</b>	<b>135</b>
6.1	Introduction . . . . .	135
6.2	Résultats d'inversion . . . . .	137
6.2.1	Inversion d'un seul paramètre . . . . .	137
6.2.2	Inversion multiparamètre . . . . .	140
6.2.3	Inversion différentielle . . . . .	144
6.2.4	Nouveaux paramètres : Inversion de la saturation et lithologie . . . . .	145
6.3	Algorithmes d'inversion et covariances . . . . .	148
6.3.1	Différence entre quasi-Newton et gradient conjugué . . . . .	149
6.3.2	Influence de la covariance des données : norme $L^2$ ou $H^1$ . . . . .	150

6.3.3	Influence de la covariance du modèle . . . . .	151
6.4	Stratégie d'amélioration de l'inversion . . . . .	153
6.4.1	Inversion multidépart . . . . .	154
6.4.2	Utilisation des ondes de surface . . . . .	155
6.4.3	Inversion par temps et offset croissant . . . . .	157
6.4.4	Inversion avec première couche fixée . . . . .	159
6.5	Choix des données et résolution . . . . .	159
6.5.1	Fréquence des données et résolution du modèle . . . . .	160
6.5.2	Influence du nombre de traces . . . . .	162
6.5.3	Influence du déport maximal des données . . . . .	163
6.5.4	Influence du bruit . . . . .	165
6.5.5	Autres problèmes posés par les données réelles . . . . .	166
6.6	Conclusion . . . . .	167
<b>7</b>	<b>Inversion de données réelles : Site de Maguelone</b>	<b>170</b>
7.1	Introduction et présentation du site . . . . .	170
7.1.1	Localisation du site . . . . .	170
7.1.2	Stratigraphie du site . . . . .	171
7.1.3	Mesures sismiques : Intérêts et dispositifs . . . . .	173
7.2	Données et prétraitements . . . . .	174
7.2.1	Traitement des données . . . . .	174
7.2.2	Données brutes et traitées . . . . .	176
7.3	Inversion du sismogramme complet . . . . .	178
7.3.1	Modèle de départ . . . . .	178
7.3.2	Données, fréquences et stratégies . . . . .	179
7.3.3	Résultats d'inversion . . . . .	179
7.3.4	Information stratigraphique . . . . .	183
7.4	Conclusion . . . . .	184
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>189</b>
	<b>Table des symboles</b>	<b>195</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>199</b>
	<b>Annexes</b>	<b>211</b>
A.	Changement de variables : Disribution équirépartie en distribu- tion gaussienne . . . . .	212
B.	Full waveform inversion in terms of poro-elastic parameters (EAGE)	214
C.	Crustal structure below Popocatépetl Volcano (Mexico) from analysis of Rayleigh waves. . . . .	220

<b>D: Data covariance and <math>H^1</math> norm . . . . .</b>	<b>232</b>
---	------------



# Introduction

# Introduction

Cette thèse porte sur l'étude de la subsurface de la terre. La subsurface correspond à des profondeurs allant des premiers mètres jusqu'à quelques centaines de mètres. Les matériaux de la croûte terrestre sont dans cette zone particulièrement variés, hétérogènes et spatialement variables. C'est en effet en surface qu'ont lieu les processus d'altération, d'érosion, de transport, de sédimentation et de diagenèse, qui vont produire la grande diversité des roches et sols sédimentaires.

Les faibles contraintes lithostatiques de cette zone font que ces matériaux sont peu consolidés ou déconsolidés. Par conséquent ces matériaux sont souvent poreux, c'est-à-dire que le solide laisse de la place à des vides saturés en fluides (liquides ou gaz). Le milieu a au moins deux phases aux propriétés très différentes. Le fluide saturant est dans la majorité des cas de l'eau avec de l'air en surface, mais il peut aussi s'agir de pétrole, d'hydrocarbures gazeux, de gaz carbonique, de magma...

## **Application à l'étude des milieux poreux**

L'intérêt de caractériser les milieux poreux réside surtout dans la connaissance des fluides les saturant. Les milieux poreux sont en effet des réservoirs contenant des fluides potentiellement exploitables. La caractérisation de tels milieux, c'est-à-dire de la quantité et répartition du fluide (porosité), de sa capacité à circuler (perméabilité) et de sa qualité (type de fluide et saturation) a de multiples applications concrètes. Les paramètres mesurables et ceux qui apportent une information pertinente diffèrent d'une application à l'autre.

Une première application de cette étude concerne les énergies fossiles. Notre société en consomme énormément pour les transports, l'industrie ou la production d'électricité. La demande croissante et massive de cette source d'énergie oblige à aller extraire le pétrole toujours plus profond (plusieurs milliers de mètres actuellement). Il faut des outils capables de mesurer les quantités d'hydrocarbures et les possibilités d'extraction. Inversement, il peut être parfois nécessaire de stocker saisonnièrement du gaz naturel ou du méthane dans des réservoirs géologiques.

La conséquence, d'actualité, de l'utilisation abusive d'énergies fossiles est le relâchement de grandes quantités de dioxyde de carbone ( $\text{CO}_2$ ) dans l'atmosphère. Or, ce gaz participe

à l'effet de serre, et l'accroissement de sa concentration conduit à un dérèglement climatique dont les conséquences sont certainement graves et encore peu connues. Une technique possible pour diminuer la concentration atmosphérique de ce gaz dans l'atmosphère serait de le piéger à de grandes profondeurs dans des aquifères salins, des réservoirs épuisés d'hydrocarbures ou des veines de charbon. Le stockage de gaz nécessite de connaître la porosité et la perméabilité de la zone de stockage, et des couches au-dessus qui doivent être les plus étanches possibles.

Une perméabilité extrêmement faible est aussi nécessaire pour le stockage de déchets radioactifs, comme au site expérimental de Bure (Meuse).

D'autres applications concernent l'eau. Ce fluide, vital pour l'homme, a toujours fait l'objet de recherche. L'eau qui circule dans les aquifères est filtrée par le sol et est généralement directement potable. Les nappes souterraines sont surexploitées et se vident, en particulier dans les zones sèches. Dans les zones côtières où l'extraction d'eau est importante, la nappe d'eau douce se rabat et laisse entrer de l'eau marine salée. La surveillance de la qualité de l'eau nécessite une connaissance précise de la lithologie et de la perméabilité. Il en est de même pour le suivi ou le traitement de pollution d'aquifères par des hydrocarbures, des métaux lourds ou des composés chimiques.

Les conséquences de la présence de fluide sous la surface vont influencer sur de nombreux risques naturels. La compréhension et la prévision de ces risques nécessitent la connaissance de la lithologie, de la porosité et des fluides. Le phénomène de liquéfaction des sols, associé au passage d'ondes sismiques, est expliqué par la non dissipation des pressions interstitielles fluides dans des sables saturés non consolidés. Les glissements de terrains présentent le long de la ligne de rupture une zone déconsolidée sujette à d'importantes circulations d'eau. Connaître la porosité et la localisation des fluides permet de comprendre la géométrie du glissement et de mieux gérer le risque. Enfin, les systèmes hydrothermaux et volcaniques pourraient être mieux compris si la localisation des laves et de l'eau était mieux connue.

La résolution des problèmes géotechniques associés au génie civil (fondations, tassements...) nécessite la connaissance des propriétés mécaniques des supports géologiques. Enfin, la caractérisation de la lithologie est importante pour la compréhension de l'histoire géologique, comme les processus de sédimentation côtiers ou de remplissage des vallées alluviales.

### **Investigation géophysique**

Différentes méthodes géophysiques permettent d'obtenir des informations sur les propriétés des milieux poreux.

Les méthodes électriques ou électromagnétiques donnent des informations sur la résistivité électrique du milieu, et le radar sur la permittivité diélectrique. Bien que les paramètres mesurés peuvent être traduits en terme de milieux biphasiques (solide et fluide), ces mé-

thodes sont vite limitées, que ce soit par leur profondeur de pénétration ou par l'ambiguïté de l'interprétation.

D'autres méthodes géophysiques permettent de caractériser directement certaines propriétés liées à la présence de fluides. C'est le cas, par exemple, de la Résonance Magnétique Nucléaire en forages (RMN) qui renseigne sur la taille des pores et la saturation en eau (Legchenko et al., 2002). La Polarisation Spontanée, c'est-à-dire la mesure des champs électriques naturels, peut fournir des informations sur les circulations de fluide (Reynolds, 1997).

Les méthodes sismiques classiques, basées sur l'hypothèse d'un comportement élastique, permettent d'imager des contrastes de propriétés mécaniques du sol. Les vitesses des ondes sismiques peuvent ensuite être reliées aux propriétés mécaniques des milieux poreux, mais cette interprétation est ambiguë et vite limitée.

Les nombreuses applications à la caractérisation de milieu poreux conduisent à chercher d'autres méthodes, par exemple des méthodes basées sur les couplages sismo-électromagnétiques (Garambois, 1999; Bordes et al., 2006). Il est aussi nécessaire de mieux relier les variables mesurées aux paramètres recherchés. En sismique, les théories poro-élastiques, plus complexes et plus spécifiques que la théorie élastique classique, ont pour vocation de permettre la caractérisation des paramètres majeurs des milieux poreux à partir des ondes sismiques.

Les travaux précurseurs de Biot (1941), Frenkel (1944), Gassmann (1951) et Skempton (1954) ont construits des ponts entre les paramètres mécaniques et hydrologiques (fluide et perméabilité) et les ondes sismiques. Depuis, de nombreux auteurs ont repris et amélioré ces relations pour expliquer les propriétés des ondes sismiques en milieu poreux. Ces théories nécessitent la connaissance de plus de paramètres que dans le cas élastique ou visco-élastique. La cohabitation de deux phases nécessite la description de la propagation d'ondes dans les zones fluides et dans le squelette solide. En contrepartie, l'atténuation et la dispersion des ondes sismiques sont directement explicables à partir des propriétés physiques du milieu poreux.

De plus, les paramètres du milieu poreux sont analytiquement reliés aux propriétés des ondes sismiques. Il est donc possible d'écrire un problème direct pour comprendre l'influence des différents paramètres et simuler les réponses sismiques de milieux réels à partir de ces propriétés. Et inversement, déterminer ces paramètres à partir des ondes sismiques est envisageable.

### **Problématique**

Le problème qui se pose est la faisabilité et la stratégie à utiliser pour estimer les paramètres poro-élastiques à partir des ondes sismiques. De nombreux auteurs ont essayé de résoudre ce problème (Domenico, 1984; Mukerji et al., 2001, ...) par différentes méthodes. L'information sur les paramètres poreux est présente à la fois dans les vitesses et dans les

formes des ondes sismiques. Dans l'idée d'utiliser au maximum ces informations, il faut travailler avec le sismogramme complet et un algorithme d'inversion de formes d'ondes complètes.

L'objectif de cette thèse est donc de répondre aux questions suivantes :

- A quels paramètres les réflexions des ondes sismiques sont-elles sensibles ?
- Est-il possible d'extraire les caractéristiques du milieu poreux par un algorithme d'inversion de formes d'ondes complètes ?

### Plan de la thèse

La première partie de cette thèse est consacrée à la compréhension, la modélisation directe et à la sensibilité des ondes sismiques en milieu poreux.

Le premier chapitre a pour objectif de présenter les différents paramètres intervenant dans la modélisation du champ d'ondes. Puis, les équations de la poro-élasticité de Biot (1956) et Gassmann (1951) sont explicitées dans un milieu biphasique pour obtenir les propriétés (vitesse et atténuation) des trois ondes en présence. Enfin, d'autres théories plus complexes sont présentées et leurs avantages explicités dans l'idée de mieux définir l'atténuation des ondes.

Le deuxième chapitre présente la méthode numérique de réflectivité utilisée pour modéliser les sismogrammes en milieu poro-élastique stratifié plan.

Ce code de propagation est appliqué dans le chapitre suivant pour étudier la sensibilité des ondes sismiques dans le cas de stockage de dioxyde de carbone ( $\text{CO}_2$ ) dans des aquifères salins profonds. La géométrie et les caractéristiques du site utilisées sont celles de Sleipner, dans la mer du Nord.

Le dernier chapitre de cette première partie est consacré au calcul analytique des dérivées partielles du déplacement sismique par rapport aux paramètres poro-élastiques. Ces opérateurs, appelés Dérivées de Fréchet, ont une double utilité : d'une part, ils interviennent directement dans l'algorithme d'inversion et ils permettent d'autre part d'étudier la sensibilité des ondes sismiques réfléchies aux différents paramètres.

La deuxième partie de cette thèse concerne l'inversion des formes d'ondes sismiques complètes en paramètres du milieu poreux.

Le premier chapitre rappelle l'état de l'art de l'inversion élastique et poro-élastique. L'algorithme d'inversion par moindres carrés généralisés est ensuite présenté, et complété par des matrices de covariance non diagonale.

Des résultats de l'inversion de données synthétiques sont présentés dans le deuxième chapitre de cette partie. Les résultats et les limites des inversions d'un seul paramètre et multiparamètre sont exposés. Les inversions avec les algorithmes classiques de Quasi-Newton et de gradients conjugués complétés sont comparés et le choix de matrice de covariance non diagonale regardée. Différentes stratégies sont explorées pour essayer d'améliorer les

possibilités de l'inversion et l'influence des caractéristiques des données est regardée. Enfin, des données sismiques ont été acquises sur le site de Maguelonne, près de Montpellier, dans un site instrumenté de bord de mer. Le code d'inversion est appliqué sur ces données réelles pour essayer de retrouver les caractéristiques stratigraphiques du site.

Les principaux résultats de ce travail seront résumés dans la conclusion. Ils seront accompagnés de quelques directions de travail à approfondir et explorer pour contourner les difficultés rencontrées dans cette thèse.

## Première partie

# Modélisation d'ondes sismiques en milieu poreux





# Chapitre 1

## Présentation des milieux poreux

### Sommaire

---

1.1	Introduction . . . . .	19
1.2	Paramètres poro-élastiques . . . . .	20
1.3	Ondes mécaniques en milieu poreux : Théorie de Biot (1956)	32
1.4	Ondes mécaniques dans des théories plus complexes : expliquer l'atténuation ? . . . . .	42
1.5	Conclusion . . . . .	48

---

### 1.1 Introduction

L'enveloppe superficielle de la terre, de quelques mètres à quelques centaines de mètres, est composée de milieux variés et complexes à décrire. En plus de variations verticales importantes, les terrains de la sub-surface peuvent présenter des variations latérales extrêmement rapides. En surface, on trouve généralement des sols, peu ou pas consolidés, constitués de grains dont la taille varie du micromètre (argiles) à plusieurs centimètres (graviers). Ces faciès sont généralement issus d'un processus d'altération, érosion, transport et dépôt. Les roches en dessous de ces formations sont plus dures et ont des origines diverses (magmatique, sédimentaire ou métamorphique) et des caractéristiques très variées.

Les milieux géologiques de la subsurface sont plus ou moins poreux, car la fraction solide laisse des espaces vides pour des phases fluides (liquide et gazeuse). Les phases solide et fluide du milieu ont des caractéristiques physiques très distinctes ce qui induit une hétérogénéité importante à l'échelle microscopique. Par ailleurs, le fluide saturant les vides possède une liberté de mouvement par rapport au solide environnant.

Le but de ce chapitre est de présenter les différents paramètres ainsi que des théories poro-élastiques définissant le rôle des phases solides et fluides dans la propagation des ondes sismiques.

Dans un premier temps, je présenterai les différents paramètres nécessaires pour décrire la complexité du milieu poreux. Il faut d'abord décrire les phénomènes à une échelle microscopique puis changer d'échelle pour s'intéresser aux paramètres macroscopiques influençant les ondes sismiques. Dans une deuxième partie, je décrirai les propriétés spécifiques des ondes sismiques dans un milieu poreux. En particulier les équations de la poro-élastodynamique tentent de définir l'atténuation de ces ondes. Nous reviendrons dans la troisième partie sur d'autres mécanismes d'atténuation des ondes et sur la manière de les prendre en compte.

## 1.2 Paramètres poro-élastiques

Deux phases aux propriétés mécaniques très différentes cohabitent dans le milieu poreux : la phase solide et la phase fluide. Leurs propriétés mécaniques doivent être décrites. Le comportement du squelette, c'est-à-dire de la matrice solide, est déterminé par l'assemblage des grains solides. Ces propriétés mécaniques correspondent aux milieux poreux lorsque le fluide est libre de circuler. Au contraire, lorsque le fluide ne peut circuler dans le milieu poreux, on parle de comportement non drainé. Les propriétés de circulation du fluide sont utiles pour décrire le comportement macroscopique de ces milieux.

La figure 1.1 résume les principaux paramètres du solide, du fluide, du squelette et du milieu poreux non drainé utilisés pour la description des ondes sismiques en milieu poreux.

Les paramètres intervenant dans les études de sensibilité et d'inversion sont indiqués après chaque titre de paragraphe.

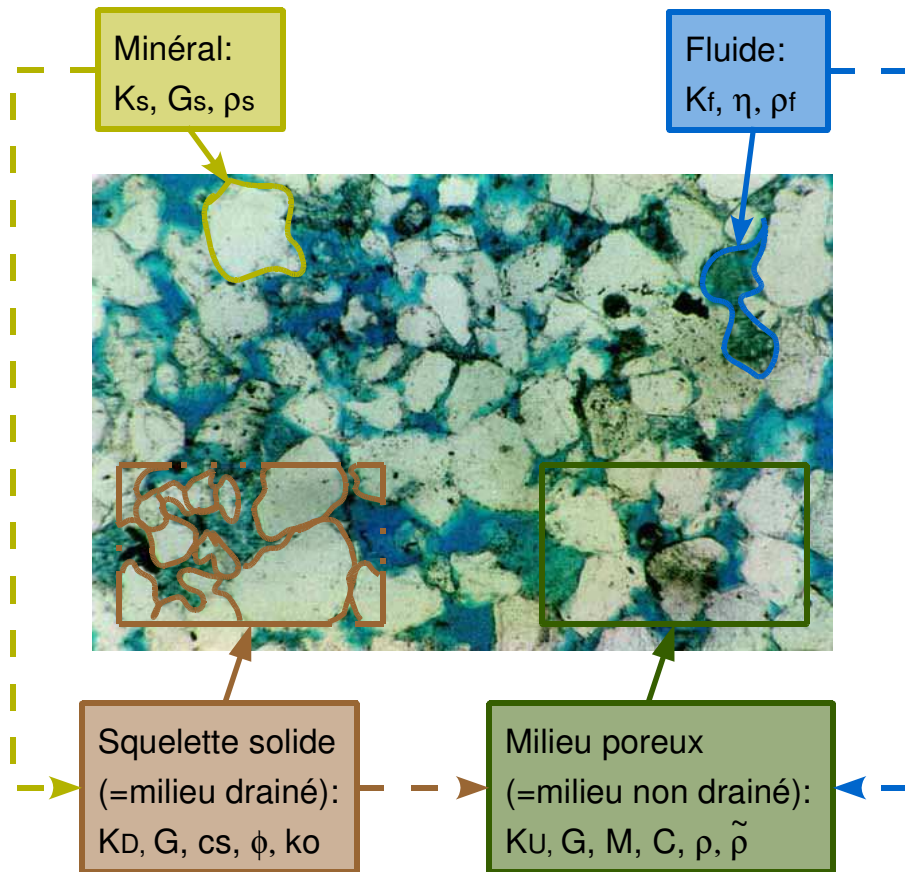
### 1.2.1 Porosité ( $\phi$ )

La porosité  $\phi$  représente le volume des vides  $V_V$  normalisé par le volume total  $V_T$  d'un échantillon poreux.

$$\phi = V_V/V_T \quad (1.1)$$

Elle ne donne aucune information sur la géométrie, la répartition ou la connexion des pores, mais uniquement sur la proportion de vides contenus dans la roche. Deux milieux ayant une porosité égale peuvent donc avoir des propriétés mécaniques ou hydrologiques totalement différentes.

Pour un sol, la porosité dépend surtout de la granulométrie, de la répartition des grains, ainsi que de la compaction du matériau. Pour un empilement idéal de sphères de



**Figure 1.1:** Classification schématique des principaux paramètres des relations de poro-élasticité. Les paramètres du solide (minéral) (parag. 1.2.4) sont assemblés pour construire les paramètres du squelette (milieu drainé) (parag. 1.2.4). Les relations de Gassmann (1951) relient les paramètres du squelette et du fluide (parag. 1.2.3) pour construire les modules mécaniques du milieu poreux non drainé (parag. 1.2.5).

La photographie est celle d'un échantillon de grès d'âge Ordovicien extrait d'une carotte à 1250 m de profondeur et grossi 84 fois. Les vides ont été saturés par de la résine époxy bleue. Les grains blancs sont de la silice, les noirs sont des minéraux argileux authigènes. (d'après [www.virtual-geology.info](http://www.virtual-geology.info), [www.pgal.co.uk](http://www.pgal.co.uk)).

sol/roche	$\phi$	$k_0(mD)$	ref.
Berea (grès)	0.223	165	1
Karr Buesky (grès)	0.088	0.364	1
Ottawa (sable)	0.37	3000	1
Lavoux à grains (calcaire)	0.24	45	2
Estailades (calcaire)	0.35	250	2
Volvic (Andésite)	0.23	41.5	2

**Table 1.1:** Valeurs moyennes de porosité et perméabilité pour différents matériaux ([1]Wang et al. (1991), [2]Rasolofosaon et Zinszner (2002)).

diamètre supérieur à  $200 \mu m$ , on trouve une porosité de 0.43, valeur qui se retrouve pour des sables de rivières (Guéguen et Palciauskas, 1992). Pour les roches métamorphiques ou plutoniques remonté à la subsurface, la porosité est surtout constituée par les fissures de décompression découpant la roche, et dépend donc des contraintes subies par le matériau. Certaines roches sédimentaires (grès, calcaires, craie...) ont à la fois une porosité liée à l'empilement de grains, et une porosité liée aux joints de stratification et aux fractures. Enfin, les roches volcaniques (basalte, pouzzolane,...) présentent une porosité importante due au piégeage du gaz lors de la solidification du magma. Cette porosité n'est pas connectée et ne sera pas traitée ici.

Les pores peuvent être reliés entre eux (on parle de porosité connectée), ou non (porosité occluse). Dans les matériaux naturels, on peut considérer que la porosité occluse est négligeable devant la porosité connectée. Seuls les matériaux volcaniques dérogent à cette règle et ne seront pas traités ici.

La porosité est mesurable en laboratoire uniquement sur un échantillon non remanié, de par sa dépendance avec l'agencement du matériau. Il est en général nécessaire de mesurer le volume total de l'échantillon puis le volume de solide (pycnomètre, poussée d'Archimède, différence de masses entre échantillon sec et saturé,...). La porosité est aussi estimable de manière indirecte en forage par des sondes à neutrons.

### 1.2.2 Circulation des fluides interstitiels ( $k_0$ , $\tilde{\rho}$ )

#### Loi de Darcy

Les fluides interstitiels ont la possibilité de circuler à travers le squelette solide. La loi de Darcy postule que la vitesse d'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux est

proportionnelle au gradient de pression interstitiel auquel il est soumis :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = -\frac{k_0}{\eta} \nabla P \quad (1.2)$$

$\eta$  est la viscosité dynamique du fluide (cf. tableau 1.2).

La perméabilité hydraulique  $k_0$  relie la vitesse d'écoulement d'un fluide (appelée vitesse de filtration)  $\partial \mathbf{w} / \partial t$  au gradient de pression interstitielle  $\nabla P$ . Son unité est le  $m^2$  ou le Darcy ( $1 \text{ Darcy} = 10^{-12} m^2$ ). Il est sensible au facteur d'échelle : un calcaire va ainsi être très peu perméable à l'échelle de l'échantillon, mais les discontinuités (fractures, stratification...) vont permettre des circulations importantes de fluide à l'échelle du massif. La perméabilité est à priori indépendante du fluide circulant, ce dernier intervenant dans la loi de Darcy uniquement à travers la viscosité.

Il n'est pas directement possible de relier la perméabilité à la porosité. En effet, la perméabilité est conditionnée par la forme et la dimension des canaux à l'intérieur d'un milieu poreux plus que par la porosité en elle-même. Il existe cependant des lois dans le cas de géométries particulières (Mavko et al., 1998). La loi de Kozeny-Carman donne

$$k_0 = \frac{B \phi^3 d^2}{1 - \phi^2} \quad (1.3)$$

$B$  est une constante valant environ 0.003 et  $d$  est le diamètre des grains. Cette loi est valide pour des sables propres, c'est-à-dire sans matériaux fins.

Bourbié et al. (1986) donnent une loi plus générale :

$$k_0 \propto \phi^n d^2 \quad (1.4)$$

Le symbole  $\propto$  désigne un lien de proportionnalité. Pour l'exposant  $n=3$ , on trouve une relation proche de (1.3), et  $n=4$  ou  $n=5$  semble plus approprié à des matériaux naturels.

### Perméabilité dynamique

La loi de Darcy est une loi hydrologique décrivant correctement les circulations de fluide lorsque les variations du gradient de pression sont très lentes (c.a.d. basses fréquences). Dans ce cas là, la viscosité contraint l'écoulement au sein de la matrice solide (forces visqueuses). Cependant, ces frottements visqueux diminuent lorsque la fréquence de l'écoulement augmente. Johnson et al. (1987) ont généralisés la loi de Darcy à toutes les fréquences en prenant un modèle de perméabilité dépendant de la fréquence (perméabilité dynamique).

$$k(\omega) = k_0 / \left( \sqrt{1 - i \frac{4}{n_J} \frac{\omega}{\omega_c}} - i \frac{\omega}{\omega_c} \right) \quad (1.5)$$

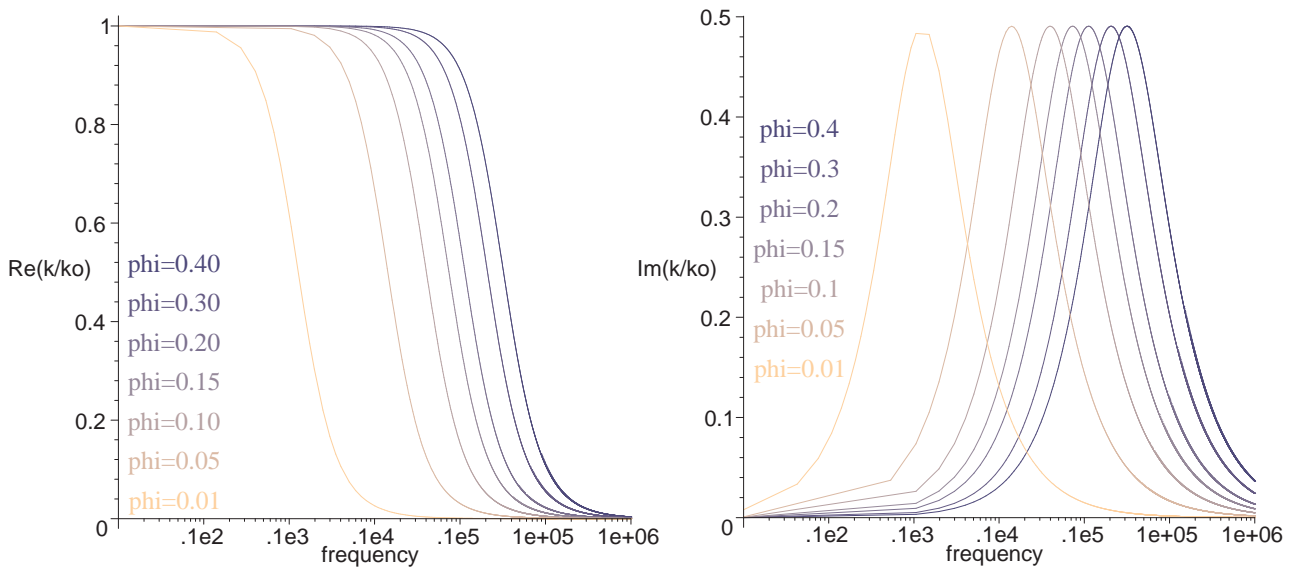
$n_J$  est un nombre sans dimension dépendant de la géométrie des pores :

$$n_J = \frac{\Lambda^2}{F k_0}, \quad (1.6)$$

où  $\Lambda$  est proportionnel au rapport du volumes des vides sur la surface des grains. En pratique  $n_J$  varie peu selon les matériaux et sa faible influence m'a conduit à approximer  $n_J$  par une constante égale à 8.

$F$  est le facteur de formation électrique (Adler et al., 1992). Il s'agit du rapport de la conductivité électrique du fluide saturant les pores sur celle du solide. Il peut s'écrire  $F = \alpha_\infty / \phi$  (Brown, 1980). La tortuosité  $\alpha_\infty$  est définie comme le rapport entre la longueur développée moyenne d'une ligne de courant joignant les deux extrémités du modèle sur la longueur réelle de ce dernier.

La loi d'Archie relie  $F$  à la porosité par  $F = \phi^{-m}$ . Le facteur de cimentation  $m$ , lié à la géométrie des pores,  $m$  vaudra 1.5 pour des sables propres, 2 pour des sables argileux et 1 pour une roche fracturée.



**Figure 1.2:** Partie réelle et imaginaire de la perméabilité dynamique normalisé par la perméabilité hydrologique en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de porosité (0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3 et 0.4) correspondant à des valeurs de  $\omega_c$  de  $10^3$ ,  $1.1 \times 10^4$ ,  $3.2 \times 10^4$ ,  $5.8 \times 10^4$ ,  $8.9 \times 10^4$ ,  $4.6 \times 10^5$  et  $2.5 \times 10^5$  Hz.

$\omega_c$  est la fréquence de relaxation ou fréquence de coupure, qui fait intervenir le densité  $\rho_f$  et la viscosité  $\eta$  du fluide.

$$\omega_c = \frac{\eta}{\rho_f F k_o} \quad (1.7)$$

Cette fréquence caractéristique sépare le comportement de la circulation du fluide à basses fréquences de celui à hautes fréquences. A basses fréquences, la circulation des fluides est limitée par les effets visqueux, c'est-à-dire par le "cisaillement" du fluide sur le solide. Lorsque  $\omega \ll \omega_c$ , la perméabilité dynamique  $k(\omega)$  est égale à la perméabilité hydrologique  $k_0$ . A haute fréquence, les effets inertiels prédominent. Plus la viscosité du fluide et

la porosité de la roche sont élevés, plus  $\omega_c$  est fort, et inversement pour la densité et la perméabilité.

En représentant pour différentes porosités les parties réelles et imaginaires de la perméabilité dynamique normalisé par la perméabilité hydrologique, on observe que la fréquence  $\omega_c$  caractérise un changement de comportement important (figure 1.2). La partie réelle de  $k(\omega)$  est environ égale à  $k_0$  jusqu'à  $\omega_c$  lorsque seuls les effets visqueux jouent puis s'effondre pour devenir pratiquement nulle. La partie imaginaire de  $k(\omega)$  est très faible excepté autour d'un pic centré sur  $\omega_c$ . Cette fréquence est comprise entre  $10^3$  et  $2.5 \times 10^5$  Hz pour une perméabilité de  $10^{-12} \text{ m}^2$  dans un milieu saturé en eau (figure 1.2).

En pratique, dans le domaine fréquentiel de la sismique (1-500 Hz) les fréquences seront généralement inférieures à cette fréquence de relaxation. Cet argument sert à justifier l'utilisation de la théorie élastique dans la majorité des travaux de sismique.

On écrit le terme de résistance à l'écoulement sous la forme :

$$\tilde{\rho} = \frac{i\eta}{\omega k(\omega)} \quad (1.8)$$

$\tilde{\rho}$  est ainsi homogène à une densité et est complexe. C'est ce terme qui est introduit dans les équations de la poro-élasticité, et qui est responsable de l'atténuation des ondes sismiques.

### 1.2.3 Caractéristiques de la fraction fluide ( $K_f$ , $\rho_f$ , $\eta$ ; $S_i$ )

Le fluide saturant les pores est caractérisé par sa densité  $\rho_f$ , son incompressibilité  $K_f$  et sa viscosité  $\eta$ . Le tableau 1.2 résume ces caractéristiques pour quelques fluides.

Fluide	$K_f$ (GPa)	$\eta$ ( $10^{-3} \text{ Pa.s}$ )	$\rho_f$ ( $\text{kg/m}^3$ )
Eau	2.27	1.0	1000
Eau de mer	2.6	1.04	1020
Huile	2.16	445	890
Air	$1.510^{-4}$	0.018	1.2
Méthane	0.022	0.015	100

**Table 1.2:** *Caractéristiques de quelques fluides à température ambiante et pression atmosphérique.*

La dépendance des paramètres mécaniques des fluides à la pression et à la température est dans la majorité des cas négligée. Il est utile de la considérer uniquement pour des profondeurs de plusieurs centaines de mètres (stockage de  $\text{CO}_2$  par exemple).

## Fluides polyphasiques

Dans de nombreux cas le fluide est polyphasique. Par exemple un sol situé à une profondeur inférieure à la profondeur de la nappe contient une fraction d'eau et d'air. De la même façon, des hydrocarbures lourds et liquides sont généralement associés à des hydrocarbures gazeux.

On définit alors la fraction volumique de la phase fluide  $i$  par  $S_i = V_i/V_V$ . Pour l'eau, cette fraction est appelée teneur en eau, coefficient de saturation ou encore humidité volumique.

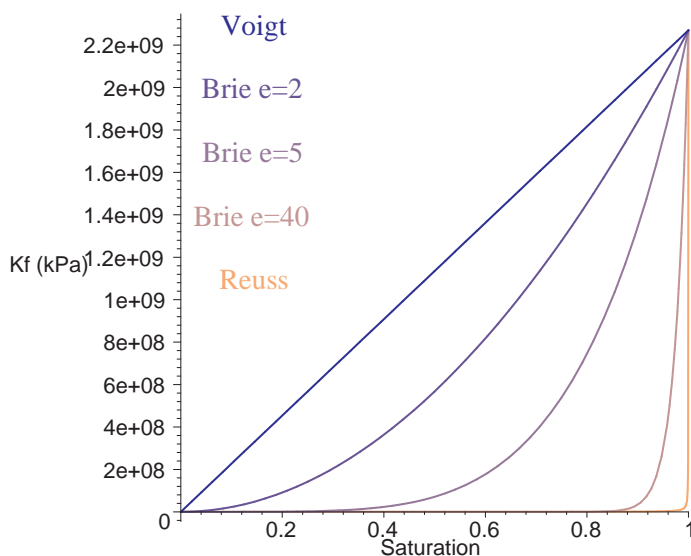
La solution la plus simple consiste à considérer la phase fluide comme homogène (Domenico, 1976; Berryman et al., 2000) et le perméabilité hydraulique constante. Les caractéristiques mécaniques sont alors obtenues par des moyennes pondérées par  $S_i$ .

$$\rho_f = \sum_i S_i \rho_{fi} \quad \text{et} \quad \frac{1}{K_f} = \sum_i \frac{S_i}{K_{fi}} \quad (1.9)$$

La densité varie linéairement avec la teneur en eau. La moyenne harmonique utilisée ici pour le calcul du module d'incompressibilité est appelé moyenne de Reuss ou moyenne iso contrainte.

Pour un milieu non saturé (eau + air), le module d'incompressibilité sera très proche de celui de l'air pour des teneurs en eau inférieures à 99,9 %. Cette moyenne a tendance à sous-estimer la valeur de  $K_f$ . Il est aussi possible de calculer le module d'incompressibilité fluide par une moyenne arithmétique (moyenne de Voigt ou iso déformation). Dans ce cas,  $K_f$  sera surestimé (cf. fig. 1.3).

Enfin, Brie et al. (1995) définit une moyenne empirique pour le calcul des coefficients



**Figure 1.3:** Module d'incompressibilité du mélange eau ( $K_f = 2.27 \text{ GPa}$ ) et air ( $K_f = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ GPa}$ ) calculée par une moyenne de Voigt, Brie ( $e$  valant 2, 5 et 40) et Reuss.



d'incompressibilité d'un milieu biphasique :

$$K_f = (K_{f1} - K_{f2})S_1^e + K_{f2} \quad (1.10)$$

L'exposant  $e$  est supérieur à 1, valeur pour laquelle cette loi est égale à la moyenne de Voigt. Dans le cas d'un mélange eau + air, cette loi approxime la loi de Reuss lorsque  $e$  vaut environ 40. Elle donne des modules d'incompressibilité très proches de ceux mesurés dans la réalité pour des valeurs de  $e$  autour de 5 (Johnson, 2001; Carcione et al., 2006).

Ces lois d'homogénéisation, bien que donnant des valeurs correctes pour le calcul des vitesses des ondes mécaniques, n'expliquent pas les phénomènes réels. En effet, généralement les deux fluides sont non miscibles et ne vont pas s'écouler de la même façon. Par exemple, dans un sol ayant une faible teneur en eau, les forces capillaires vont bloquer l'eau autour des grains tandis que l'air va pouvoir circuler. Il est donc nécessaire de définir pour chaque phase une perméabilité relative (rapport de la perméabilité de chaque phase sur la perméabilité monophasique), un déplacement fluide, une pression interstitielle, c'est-à-dire une nouvelle loi de Darcy. Suite à ces considérations ont été créés les modèles de saturation imparfaite (cf. section 1.4.4).

### 1.2.4 Caractéristiques de la fraction solide

$$(K_s, \rho_s, G_s; K_D, cs, G)$$

#### A l'échelle du minéral ( $K_s, \rho_s, G_s$ )

La fraction solide est constituée de grains qui possèdent une densité  $\rho_s$ , un module d'incompressibilité solide  $K_s$  et un module de cisaillement solide  $G_s$ . Le tableau 1.3 donne des valeurs moyennes des paramètres mécaniques et de la vitesse  $V_L$  de propagation des ondes P.

Les milieux poreux sont souvent composites, c'est-à-dire constitués de différents types de minéraux ayant des caractéristiques mécaniques différentes. Par exemple un calcaire peut être constitué de calcite, dolomite et minéraux argileux. Comme dans le calcul des modules de incompressibilité fluide (section 1.2.3), on obtient  $K_s$  et  $G_s$  en considérant des valeurs moyennes pondérées par le pourcentage de chaque constituant (loi de Voigt ou de Reuss).

Les grains peuvent aussi présenter une microporosité et une fissuration, ce qui va diminuer leurs caractéristiques mécaniques. Les valeurs données dans le tableau 1.3 concernent des minéraux sains. En pratique, les valeurs utilisées pour la modélisation seront inférieures ou égales à celles ci.

#### A l'échelle du squelette ( $K_D, cs, G$ )

Les grains (minéraux) sont arrangés en un squelette solide et sont plus ou moins cimen-

Minéral	$\rho_s (kg/m^3)$	$K_s (GPa)$	$G_s (GPa)$	$V_L (m/s)$
Calcite $CaCO_3$	2700	72.6	31.6 (29-32)	6660
Silice $SiO_2$	2700	37	44	6050
Olivine $(Mg, Fe)SiO_4$	3320	130	80	8450
Feldspaths potassiques (plagioclases)	2695	53.6	27.1	6250
Feldspaths (moyen)	2620	37.5	15	4680
biotite	3050	59.7	42.3	5150
Muscovite	2800	51.6	31	5800
Dolomite	2880	93.9	45.6	7050
Argile (Mexico Gulf clays)	2300	6.75	4.925	3600
Anhydrite	2970	58.1	31.3	5800

**Table 1.3:** *Caractéristiques moyennes de quelques minéraux (Bourbié et al., 1986; Mavko et al., 1998).*

tés entre eux. Ainsi les grains dans un sable ne seront pas cimentés, tandis qu'ils le seront dans un grès consolidé. L'arrangement de ces grains laisse la place à des vides (porosité). Il est nécessaire de définir un nouveau module  $K_D$  appelé module d'incompressibilité drainé du milieu poreux.  $K_D$  représente la réponse élastique du squelette solide ou du milieu poreux lorsque le fluide est libre de s'évacuer, et la pression interstitielle  $P$  nulle. il est défini par :

$$K_D = - \left[ \frac{\delta P_c}{\delta V/V_0} \right]_{\delta P=0} \quad (1.11)$$

avec  $P_c$  la pression de confinement,  $V$  le volume de l'échantillon et  $V_0$  volume initial. Il est mesurable en laboratoire par un essai triaxial drainé.

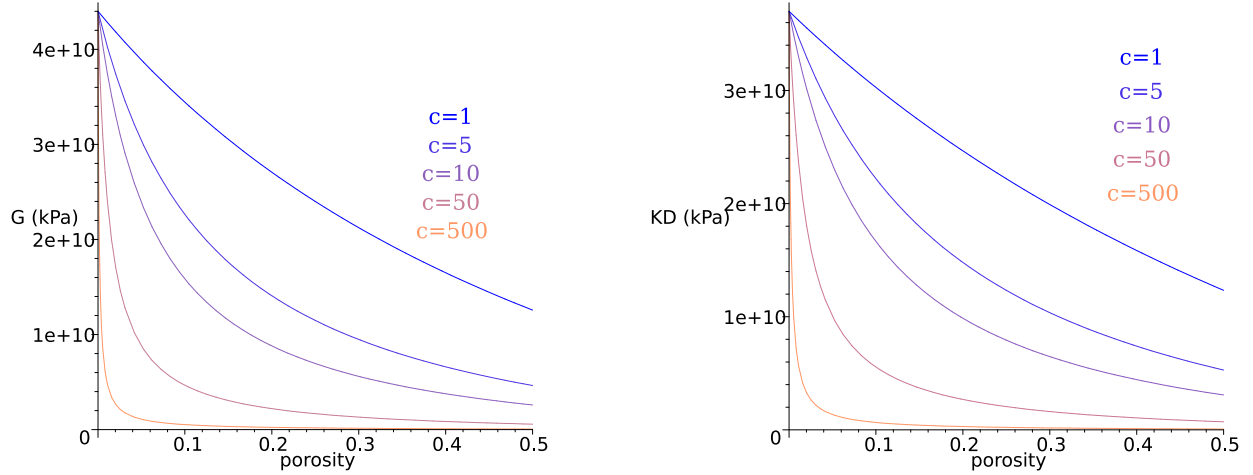
De la même manière un nouveau module de cisaillement  $G$  est défini pour le squelette. Il est mesurable en laboratoire grâce à un essai de cisaillement.

$K_D$  et  $G$  ne dépendent donc pas du fluide saturant, mais uniquement de la microgéométrie, de la composition des grains et de leur cimentation

### Relations entre les paramètres mécaniques des minéraux ( $K_s, G_s$ ) et du squelette ( $K_D, G, cs$ )

Le module d'incompressibilité du minéral peut être relié à celui de squelette par la relation (Mavko et al., 1998) :

$$\frac{1}{K_D} = \frac{1}{K_s} + \frac{\phi}{K_\phi} \quad \text{où} \quad \frac{1}{K_\phi} = \frac{1}{V_V} \left[ \frac{\partial V_V}{\partial P_c} \right]_{P=cte} \quad (1.12)$$



**Figure 1.4:** Variation de  $G$  et  $K_D$  (eq. 1.14) en fonction de  $\phi$  et  $cs$

$V_V$  est le volume des vides et  $P$  la pression interstitielle. Le problème est alors de donner une définition à  $K_\phi$ . De nombreux auteurs ont essayé de trouver des lois empiriques ou de la résoudre pour des cas simplifiés, tel un empilement de sphères identiques.

Pour un milieu consolidé, Geertsma et Smith (1961) proposent une relation empirique pour les roches ayant une porosité inférieure à 0.3 :

$$K_D = K_s \frac{1 - \phi}{1 + 50 \phi} \quad (1.13)$$

Nous retiendrons la définition simple de Pride (2005) qui fait apparaître le paramètre de consolidation  $cs$  du squelette. C'est ces relations qui seront utilisées dans les études de sensibilité et dans l'inversion.

$$\begin{aligned} K_D &= K_s \frac{1 - \phi}{1 + cs \phi} \\ G &= G_s \frac{1 - \phi}{1 + 3 cs \phi/2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

La valeur de 3/2 dans l'expression donnant  $G$  est arbitraire, mais donne des rapports cohérents entre les vitesses des ondes P et S (Knackstedt et al., 2005).

Pour un matériau consolidé,  $cs$  est compris entre 2 et 20. Il peut atteindre 5000 pour des matériaux lâches. Ces formules empiriques, assez fiables pour les milieux cimentés, le sont beaucoup moins pour les milieux non consolidés. Toutefois, elles ont l'avantage d'être très simples et de n'introduire qu'un seul nouveau paramètre. Les variations de  $G$  et  $K_D$  sont représentées sur la figure 1.4 en fonction de la porosité pour différentes valeurs de consolidation pour des grains constitués de silice. Lorsque la porosité est nulle, le matériau a les propriétés du minéral. Plus la porosité est élevée, moins le milieu est résistant, surtout si  $cs$  est grand (matériau non consolidé).

Bemer et al. (2004) proposent une définition très similaire. On peut relier son étude à celle présentée ci dessus en posant :

$$cs = \frac{K_s}{K_c} - 1 = \frac{2}{3} \frac{G_s}{G_c} - 1, \quad (1.15)$$

où  $K_c$  et  $G_c$  sont les modules mécaniques du ciment reliant les grains.

Pour un milieu normalement consolidé, le module non drainé dépend beaucoup de la pression subie, c'est-à-dire de la pression effective  $P_e$ . Il s'agit de la pression de confinement  $P_c$  réduite de la pression fluide  $P$ .  $G$  et  $K_D$  augmentent donc avec la profondeur. Par exemple, Walton (1987) a produit une loi simple pour un assemblage aléatoire de sphères identiques :

$$K_D = \frac{1}{6} \left( \frac{3(1 - \phi(0))^2 n^2 P_e}{\pi^4 C_s} \right)^{1/3} \quad \text{et} \quad G = R K_D \quad (1.16)$$

$n$  est le nombre moyen de contacts par grain (nombre de coordination) et  $\phi(0)$  est la porosité pour une pression effective nulle.  $C_s$ , paramètre de conformité et  $R$ , rapport de  $G$  sur  $K_D$ , sont évalués par :

$$C_s = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{G_s} + \frac{1}{K_s + G_s/3} \right) \quad \text{et} \quad \frac{3}{5} \leq R \leq \frac{18}{5} \frac{K_s + G_s}{3K_s + 2G_s} \quad (1.17)$$

La borne inférieure de  $R$  correspond à un contact très lisse qui empêche la transmission des contraintes tangentielles, tandis que la borne supérieure correspond à un contact tellement rugueux que les contraintes se transmettent entièrement.

### 1.2.5 Caractéristiques du milieu poreux ( $K_U$ , $\rho$ , $M$ ; $C$ , $cs$ , $G$ )

Le milieu poreux est constitué du squelette solide dont les vides sont remplis par un fluide saturant. Par conséquent, les caractéristiques physiques de milieux découlent de l'agencement des différentes phases et éventuellement de leur interaction.

#### Masse volumique

La densité du milieu poreux  $\rho$  est la moyenne des densités solide  $\rho_s$  et fluide  $\rho_f$  pondérées par le volume occupé.

$$\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f \quad (1.18)$$

#### Module d'incompressibilité non drainé du milieu poreux $K_U$

$K_U$  caractérise la réponse d'un milieu poreux lorsqu'il n'y a pas d'échange de fluide avec l'extérieur ( $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ ). Lorsque l'échantillon est soumis à une pression de confinement  $P_c$ , la pression interstitielle augmente et participe à la résistance du matériau. Il est donc

représentatif de l'ensemble grains plus fluide et est mesurable en laboratoire par un essai triaxial non drainé.

$$K_U = - \left( \frac{\delta P_c}{\delta V/V_0} \right)_{\nabla \cdot \mathbf{w}=0} \quad (1.19)$$

avec  $V$  le volume,  $V_0$  le volume initial et  $\mathbf{w}$  le déplacement fluide.

### Module de Skempton $B$

Le module de Skempton  $B$  (Skempton, 1954) représente la part de la pression de confinement  $P_c$  se transférant sur la pression interstitielle  $P$  lorsque l'échantillon soumis à des contraintes isotropes n'est pas drainé.

$$B = - \left( \frac{\delta P}{\delta P_c} \right)_{\nabla \cdot \mathbf{w}=0} \quad (1.20)$$

$B$  vaut 1 si le liquide est incompressible, et 0 pour un fluide infiniment compressible.

### Constante de Biot-Willis $\alpha$ , module $C$ , coefficient de rétention fluide $M$

A partir des modules  $K_U$ ,  $K_D$  et  $B$ , facilement mesurables par des essais de laboratoire, on peut définir la constante de Biot-Willis  $\alpha$  (Biot et Willis, 1957), le module  $C$  et le coefficient de rétention de fluide  $M$ . Les paramètres  $M$  et  $C$  interviennent directement dans les équations constitutives de l'acoustique des milieux poreux.  $M$  est lié à l'augmentation de pression nécessaire pour accumuler une quantité de fluide dans un échantillon à volume constant.  $C$  est défini comme la variation de la pression interstitielle due à une variation de volume dans un échantillon non drainé.

$$\begin{aligned} C &= BK_U, \\ M &= \frac{BK_U}{\alpha} \\ \alpha &= \frac{1 - K_D/K_U}{B} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Berge et al. (2003) ont montré que, bien que  $K_U$ ,  $K_D$ ,  $B$ ,  $M$  et  $C$  dépendent du type de fluide saturant,  $\alpha$  ne l'est pas.

### Module de cisaillement $G$

Le fluide ne présente pas de résistance au cisaillement. Ainsi, le module de cisaillement  $G$  du milieu poreux est indépendant du fluide et est donc égal au module de cisaillement du milieu drainé (=squelette). Il est directement mesurable en laboratoire par un essai de cisaillement.

### 1.2.6 Relations de Gassmann (1951) :

En voulant relier les propriétés sismiques et hydrologiques des milieux poreux, Gassmann (1951) a montré que pour un matériau isotrope et uniforme dans un échantillon et dans la limite de basses fréquences les modules  $K_U$  et  $B$  sont indépendants de la fréquence. Il a donc exprimé ces modules en fonction de  $K_D$ ,  $\phi$ ,  $K_s$  et  $K_f$ .

$$\begin{aligned} K_U &= \frac{\phi K_D + [1 - (1 + \phi) K_D/K_s] K_f}{\phi (1 + \Delta)} \\ B &= \frac{1 - K_D/K_U}{1 - K_D/K_s} \end{aligned} \quad (1.22)$$

$C$ ,  $M$  et  $\alpha$  sont donc eux aussi exprimables en fonction de  $K_D$ ,  $\phi$ ,  $K_s$  et  $K_f$ .

$$\begin{aligned} C &= \frac{(1 - K_D/K_s) K_f}{\phi (1 + \Delta)} \\ M &= \frac{K_f}{\phi (1 + \Delta)} \\ \alpha &= 1 - \frac{K_D}{K_s} \\ \text{avec } \Delta &= \frac{1 - \phi K_f}{\phi K_s} \left( 1 - \frac{K_D}{(1 - \phi) K_s} \right) \end{aligned} \quad (1.23)$$

De même, le module de cisaillement  $G$  est indépendant de la fréquence. Il est alors possible de relier  $\alpha$  et  $cs$  par la relation  $\alpha = \phi (cs + 1)/(1 + cs \phi)$ .

Les relations de Gassmann (1951) se vérifient expérimentalement et donnent de très bons résultats (Rasolofosaon et Zinszner, 2001). Les valeurs de  $K_U$  et  $G$  mesurées en laboratoire sur des échantillons de calcaire et grès montrent un accord étonnamment bon avec les valeurs calculées prédites par la théorie de Gassmann (1951). En particulier, la non dépendance au fluide de  $G$  est validée. Gassmann (1951) a aussi pris en compte l'anisotropie dans des relations qui ne seront pas utilisées ici.

## 1.3 Ondes mécaniques en milieu poreux : Théorie de Biot (1956)

L'objectif de cette partie est d'assembler les différents paramètres précédemment introduits pour obtenir les équations de la poro-élastodynamique.

Les premiers travaux sur ce sujet sont attribués à Biot (1941) qui traite le comportement poro-élastique en quasi-statique. En 1944, Frenkel (1944) obtient des équations décrivant le taux de mouvement relatif fluide/solide généré par une onde sismique. La

contribution de Gassmann (1951) a déjà été évoquée ci-dessus et relie les paramètres mécaniques aux propriétés du fluide. Les travaux de Biot (Biot, 1956; Biot et Willis, 1957; Biot, 1962) posent réellement les bases de la poro-élastodynamique. Les deux papiers de Biot (1956) décrivent les comportements distincts hautes et basses fréquences, sans les relier, ce qui sera fait par Geertsma et Smith (1961). Cette théorie est souvent appelée Biot-Gassmann-Geerstma (BGG), ou Biot-Gassmann ou Biot.

Depuis, de nombreux auteurs ont travaillé sur ce problème : ils ont reformulé les équations et leur ont donné une validité mathématique manquante, ils ont élargi cette théorie et complexifié les équations. Dans cette thèse, je m'appuierai sur l'article de synthèse de Pride (2005), qui a recalculé (Pride et al., 1992) les équations de la poro-élastodynamique en suivant l'approche établie par de la Cruz et Spanos (1985) et en introduisant la perméabilité dynamique de Johnson et al. (1987).

### 1.3.1 Changement d'échelle et hypothèses

Les milieux poreux sont très hétérogènes à l'échelle microscopique. En effet, les caractéristiques mécaniques des pores et de la matrice sont totalement différentes. Or les longueurs d'ondes utilisées en sismique sont très grandes devant la taille des pores. Les ondes sismiques ne sont sensibles qu'aux propriétés macroscopiques du milieu.

On souhaite avoir des lois décrivant le comportement du milieu poreux moyen. Il faut donc "homogénéiser" le milieu poreux pour obtenir des équations caractéristiques à une échelle macroscopique. Il existe différentes techniques d'homogénéisation.

La première est basée sur le concept de moyenne. On résout un problème microscopique au niveau d'une cellule élémentaire. Les équations microscopiques obtenues sont ensuite moyennées sur le volume d'homogénéisation. Ce volume est supérieur à la taille des grains et inférieur aux longueurs d'ondes. Le milieu réel hétérogène est donc substitué à un milieu fictif homogène à l'échelle des ondes. Cette technique a été utilisée entre autres auteurs par de la Cruz et Spanos (1985) et Pride et al. (1992).

Une seconde méthode est basée sur la répétitivité spatiale des hétérogénéités microscopiques. En faisant tendre la périodicité spatiale de ces hétérogénéités locales vers 0, on obtient la forme des lois macroscopiques (Auriault et al., 1985).

Enfin, Biot (1956) a considéré que les principes de la mécanique des milieux continus étaient directement applicables et a délibérément ignoré le niveau microscopique.

#### Hypothèses d'homogénéisation

Plusieurs hypothèses sont nécessaires pour décrire le comportement d'un milieu poreux par des lois macroscopiques (Biot, 1956; Bourbié et al., 1986) :

- La première hypothèse suppose les longueurs d’ondes grandes devant les dimensions des pores. Il n’y a pas d’effet de diffraction ou de diffusion induit par les grains. Cette hypothèse est souvent vérifiée en géophysique. Les milieux très fracturés, aux fractures métriques ou plus peuvent cependant poser des problèmes.
- La deuxième hypothèse est celle des petits déplacements tant de la phase fluide que solide. Les matériaux doivent en effet garder un comportement élastique. Les déformations en sismique classique sont relativement faibles et sont en accord avec cette hypothèse.
- La phase liquide doit être continue. La matrice est donc constituée de la phase solide (grains) et du fluide contenu dans les pores occlus.
- La porosité est supposée isotrope et uniforme, la matrice l’est donc aussi.
- Le milieu est considéré saturé par un fluide monophasique Newtonien (les déformations sont reliés linéairement aux forces visqueuses) dans la théorie de Biot (1956) ;
- Les couplages thermomécaniques et sismo-électro-magnétiques (Garambois et Dietrich, 2002; Bordes et al., 2006) sont négligés dans cette étude.

### 1.3.2 Théorie de la poro-élastodynamique

En considérant une dépendance des déplacements en  $\exp(-i\omega t)$ , les équations de la poro-élastodynamique deviennent (Pride et al., 1992; Pride, 2005) :

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} &= -\omega^2(\rho \mathbf{u} + \rho_f \mathbf{w}) \\
 \boldsymbol{\tau} &= [K_U \nabla \cdot \mathbf{u} + C \nabla \cdot \mathbf{w}] \mathbf{I} + G [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T - 2/3(\nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{I}))] \\
 -P &= C \nabla \cdot \mathbf{u} + M \nabla \cdot \mathbf{w} \\
 -\nabla P &= -\omega^2 \rho_f \mathbf{u} - \omega^2 \tilde{\rho} \mathbf{w} ,
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

$\mathbf{u}$  est le déplacement d’un volume moyen de milieu poreux . Il est environ égal au déplacement moyen des grains solides ( $\mathbf{u}_s$ ) :  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_s$ .

$\mathbf{w}$  est le déplacement relatif fluide/solide, relié au déplacement moyen du fluide par :

$$\mathbf{w} = \phi(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_s) . \tag{1.25}$$

$\boldsymbol{\tau}$  désigne le tenseur des contraintes dont la partie isotrope est la contrainte de confinement  $P_c$  :  $\boldsymbol{\tau} = -P_c \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}^D$ .  $\boldsymbol{\tau}^D$  est la partie déviatorique du tenseur des contraintes.  $P$  désigne la pression interstitielle.

Il est intéressant de noter la présence de deux équations décrivant la pression interstitielle et son gradient. Les différences de comportement haute et basse fréquence se retrouvent dans ces équations : la dépendance en  $\omega^2$  des termes inertiels en  $\rho_f$  font qu’ils



dominant à haute fréquence sur le terme visqueux ( $\tilde{\rho}\mathbf{w}$ ) en  $\omega$ , et inversement.

En éliminant  $\boldsymbol{\tau}$  et  $P$  de ces équations, on obtient le système matriciel :

$$\begin{aligned} [(K_U + G/3)\nabla\nabla + G\nabla^2 + \omega^2\rho]\mathbf{I} \cdot \mathbf{u} + [C\nabla\nabla + \omega^2\rho_f\mathbf{I}] \cdot \mathbf{w} &= 0 \\ [C\nabla\nabla + \omega^2\rho_f\mathbf{I}] \cdot \mathbf{u} + [M\nabla\nabla + \omega^2\tilde{\rho}\mathbf{I}] \cdot \mathbf{w} &= 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

On considère des ondes planes avec une dépendance en  $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$  pour les déplacements  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$ .  $\mathbf{r}$  se rapporte à la direction de propagation de l'onde et  $\mathbf{k}$  est le vecteur nombre d'onde, orienté selon la direction de polarisation de l'onde.

Or  $\mathbf{k} = \omega s(\omega) \mathbf{k}/||\mathbf{k}||$ , avec  $s(\omega)$  la lenteur de l'onde. En introduisant ces expressions dans l'eq.(1.26), on souhaite séparer les ondes en fonction de leur polarisation. Dans ce but, on impose un produit scalaire nul pour les ondes transverses entre la direction de propagation et la direction de polarisation. Il est égal à 1 pour les ondes longitudinales. L'équation matricielle (1.26) peut alors se résoudre en termes de lenteurs (inverse de la vitesse).

### 1.3.3 Propriétés des ondes sismiques en milieu poreux

#### Ondes transverses :

La lenteur des ondes S s'écrit :

$$S_S^2 = \frac{\rho - \rho_f^2/\tilde{\rho}}{G} \quad (1.27)$$

Elle diffère de la définition élastique  $S_S^2 = \rho/G$  par le terme correctif  $\rho_f^2/\tilde{\rho}$  appliquée sur la densité. Ce terme est complexe et va fournir l'atténuation de l'onde S.

On définit le terme  $\beta_s$  comme le rapport des amplitudes du déplacement fluide sur solide.

$$\frac{W}{U} = \beta_s = -\frac{\rho_f}{\tilde{\rho}} \quad (1.28)$$

La mesure de ce rapport permettrait de déterminer directement la perméabilité. Malheureusement il n'existe actuellement pas de capteurs capables de mesurer le déplacement du fluide sans perturber le milieu. On constate que les déplacements solide et fluide sont en opposition de phase.

#### Ondes longitudinales :

La résolution des équations de la poro-élastodynamique aboutit à deux solutions acceptables. Deux ondes de compression vont donc se propager dans un milieu poreux : une

onde de compression rapide (notée Pf), identique aux ondes P en milieu élastique et une onde de compression lente (notée Ps) aussi appelée onde de Biot. Leur lenteur est défini par :

$$2S_{Pf,Ps}^2 = \gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - \frac{4(\rho\tilde{\rho} - \rho_f^2)}{HM - C^2}} \quad (1.29)$$

où le signe  $-$  permet de calculer la lenteur de l'onde Ps, tandis que le signe  $+$  donnera la lenteur de l'onde Pf. Les paramètres  $\gamma$  et  $H$  sont définis par :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\rho M + \tilde{\rho} H - 2\rho_f C}{HM - C^2} \\ H &= K_U + 4G/3 \end{aligned} \quad (1.30)$$

La propagation d'une onde Pf induit une variation de pression de confinement et donc de pression interstitielle dans le fluide. Celui ci aura donc tendance à se déplacer des zones en compression vers les zones en extension comme le décrit la loi de Darcy. Cette onde Ps est, contrairement à l'onde Pf très dispersive, peu propagative et très fortement atténuée (cf. fig 1.5). Son existence a été expérimentalement confirmée *a posteriori* par Plona (1980). On peut aussi calculer le rapport d'amplitude des déplacements fluide et solide :

$$\frac{W}{U} = \beta_{Pf,Ps} = -\frac{HS_{Pf,Ps}^2 - \rho}{CS_{Pf,Ps}^2 - \rho_f} \quad (1.31)$$

Dans une limite basse fréquence (loin de la fréquence de coupure  $\omega_c$ ), ce rapport vaut :

$$\begin{aligned} \beta_{Pf} &\simeq -\frac{i\omega\rho_f k_0}{\eta} \left(1 + \frac{\rho}{\rho_f} \frac{C}{H}\right), \\ \beta_{Ps} &\simeq -\frac{H}{C}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

On constate que pour les ondes Pf le rapport d'amplitude est très inférieur à 1. Le milieu se comporte pratiquement comme un milieu non drainé. Au contraire,  $H$  étant généralement plus grand que  $C$ , le déplacement liquide est plus important que le déplacement solide pour l'onde lente. Dans les deux cas, le déplacement solide et fluide sont en opposition de phase.

### Signification physique de l'onde lente Ps

En réintroduisant l'approximation basse fréquence du rapport d'amplitude (équations (1.32)) pour l'onde Pf dans les équations constitutives de la poro-élastodynamique, on obtient l'équation de l'élastodynamique classique. On retrouve donc les lenteurs classiques en sismologie. L'onde Pf est unique avec une lenteur classiquement définie par  $S_{Pf}^2 = \rho/(K_U + 4G/3)$ .

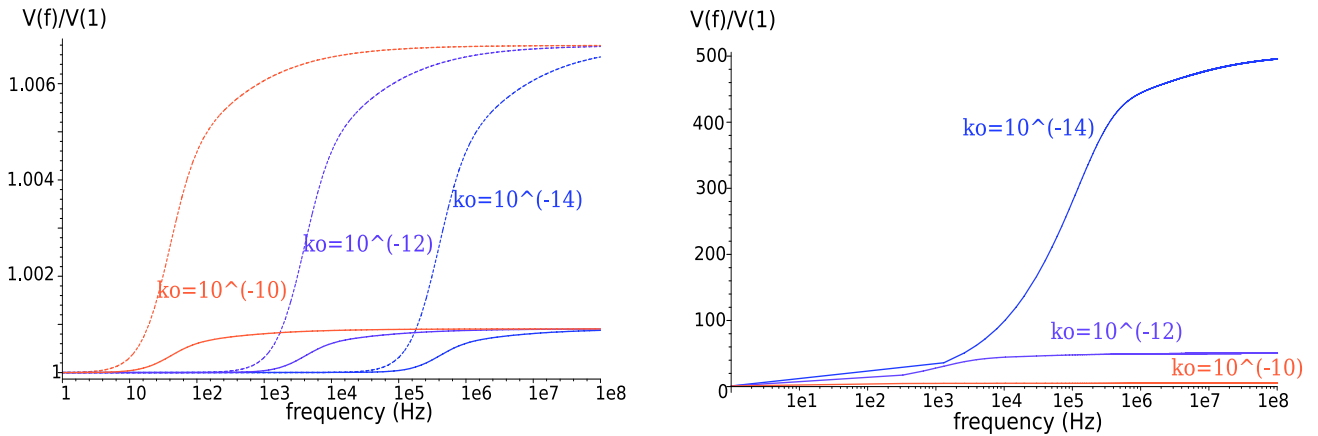
Par contre, en effectuant la même démarche avec  $\beta_{Ps}$ , on trouve :

$$\frac{k_0}{\eta} M \left( 1 - \frac{C^2}{MH} \right) \nabla^2 p_f + i\omega p_f = 0 \quad (1.33)$$

Cette équation est une équation de diffusion de pression interstitielle, avec un coefficient de diffusion  $D = \frac{k_0}{\eta} M \left( 1 - \frac{C^2}{MH} \right)$ . A basse fréquence, l'onde Ps est juste une onde de diffusion de la pression interstitielle.

### 1.3.4 Atténuation et dispersion des ondes dans la théorie de Biot (1956).

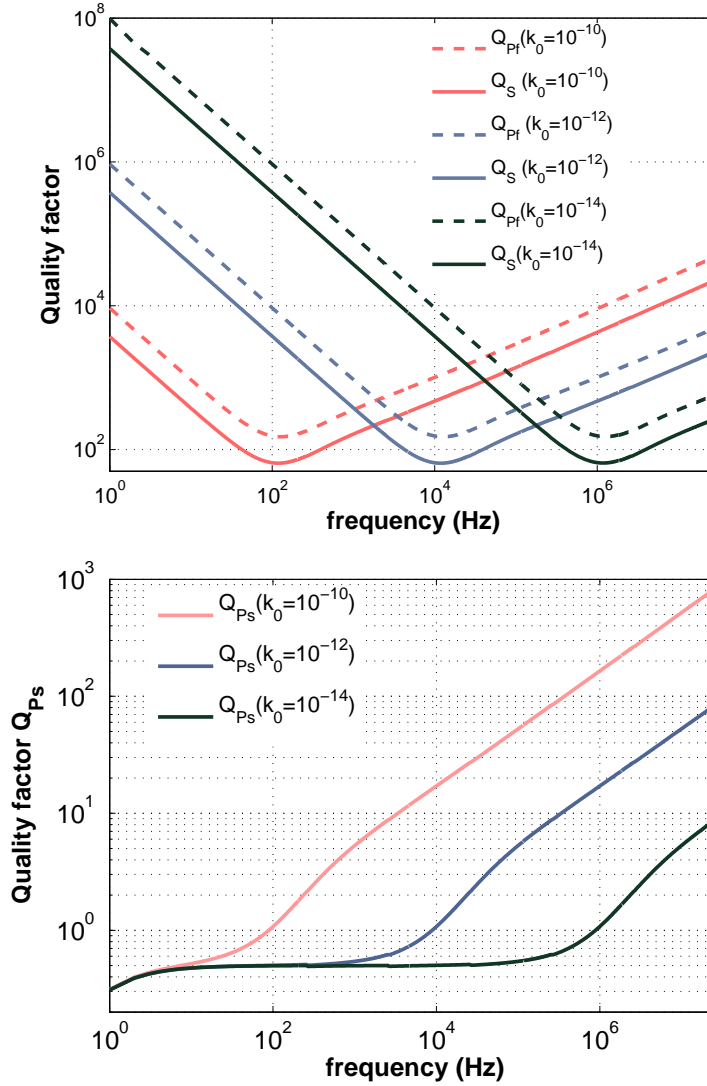
Les expressions analytiques des lenteurs permettent de calculer le facteur de qualité  $Q_\xi$  et la dispersion des vitesses pour chaque type d'onde. Ceci constitue un gros avantage par rapport à la théorie élastique classique où le facteur de qualité et la dispersion sont estimés de manière empirique et n'ont pas de justification analytique.



**Figure 1.5:** Dispersion de la vitesse des ondes Pf (traits pleins) et S (traits pointillés) (figure de gauche) et Ps (figure de droite) pour des perméabilités de  $10^{-10}$ ,  $10^{-12}$  et  $10^{-14} \text{ m}^2$ .

#### Dispersion

La figure 1.5 présente les variations des vitesses en fonction de la fréquence pour différentes perméabilités. Les ondes Pf et S sont peu dispersives et présentent deux comportements distincts : la vitesse est approximativement constante à basse fréquence puis rejoint une valeur légèrement différentes à haute fréquence. La transition se fait autour de la fréquence de coupure  $\omega_c$ . L'onde Ps est beaucoup plus dispersive. Elle présente des variations de 40000 % pour une perméabilité de  $10^{-14}$ . La vitesse est aussi faiblement dispersive à basses fréquences et haute fréquence, avec une transition autour de la fréquence de coupure. La différence de vitesse entre hautes et basses fréquences dépend très fortement de la valeur de la perméabilité.



**Figure 1.6:** Facteur de qualité  $Q$  des ondes Pf (traits pointillés) et S (traits pleins) (haut) et Ps (bas) en fonction de la fréquence pour des perméabilité de  $10^{-10}$ ,  $10^{-12}$  et  $10^{-14}$  m<sup>2</sup>.

### Atténuation

Le facteur de qualité est donné par :

$$Q_{\xi}(\omega) = 2 \frac{\mathcal{R}(S_{\xi}(\omega))}{\mathcal{I}(S_{\xi}(\omega))} \quad (1.34)$$

$\mathcal{R}$  et  $\mathcal{I}$  désignent respectivement la partie réelle et imaginaire.  $S_{\xi}$  désigne la lenteur de l'onde  $\xi$  (Ps, Pf ou S).

Dans la théorie utilisée (cf. eq. 1.26), on voit que seul le coefficient  $\tilde{\rho}$  a une partie imaginaire. L'atténuation et la dispersion des ondes sont donc uniquement dues aux circulations de fluide et aux effets visqueux que cela entraîne. Seule la diffusion de pressions interstitielles va entraîner une perte d'énergie.

La figure 1.6 décrit le comportement du facteur de qualité en fonction de la fréquence. Pour les ondes Pf et S, il décroît selon l'inverse de la fréquence jusqu'à fréquence de cou-

pure  $\omega_c$ , puis croit environ en  $f^2$ . Il est intéressant de noter que la valeur du minimum et les pentes de  $Q$  sont indépendantes de  $k_0$  tandis que  $\omega_c$  en dépend. La valeur de l'atténuation pour  $f = 1$  est très fortement dépendante de la perméabilité. Les ondes Ps sont très atténuées en dessous de la fréquence de coupure, avec des facteurs de qualité inférieurs à 1.  $Q$  augmente ensuite à haute fréquence, l'onde Ps devient propagative (cf. sect. 2.3.2).

Enfin les valeurs du facteur de qualité obtenues pour les ondes Pf et S sont très fortes en particulier aux très basses et très hautes fréquences. La diffusion des pressions interstitielles ne suffit donc pas à expliquer l'atténuation. Il faut alors prendre en compte d'autres phénomènes, en plus de l'atténuation de Biot, pour expliquer les pertes d'énergie subies par les ondes mécaniques dans les milieux géologiques.

### 1.3.5 Sensibilité de la vitesse et de l'atténuation

La figure 1.7 présente les variations de vitesse et d'atténuation consécutives à une variation de 10 % des paramètres  $\phi$ ,  $k_0$ ,  $\rho_f$ ,  $\rho_s$ ,  $K_s$ ,  $G_s$ ,  $K_f$ ,  $cs$  et du facteur de cimentation  $m$ . Les caractéristiques du modèle utilisé sont données dans le tableau 3.1.

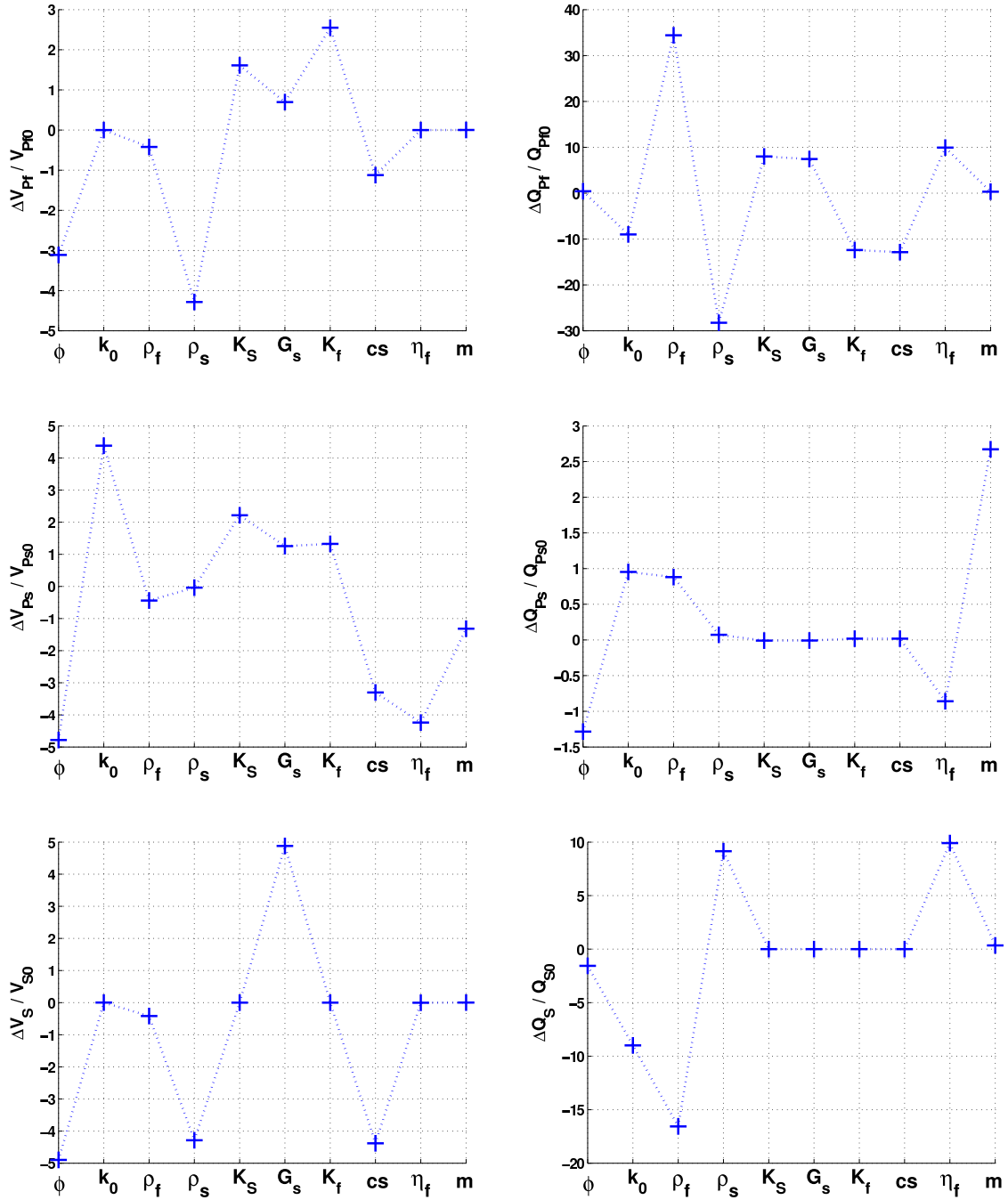
Les tendances mises en valeur montrent naturellement une augmentation des vitesses avec la raideur du milieu et inversement avec la densité :

- Une augmentation de  $\phi$ , du paramètre de consolidation  $cs$  ou des densités  $\rho_s$  et dans une moindre mesure  $\rho_f$  fait diminuer les vitesses des trois ondes ;
- Une augmentation de  $K_s$  et  $K_f$  fait augmenter les vitesses des ondes de compression, tandis que le durcissement du module de cisaillement va entraîner une hausse de toutes les vitesses.
- La vitesse de l'onde Ps dépend très fortement des paramètres de circulations du fluide : une hausse de  $\eta_f$  ou  $m$  fait augmenter la vitesse au contraire de la perméabilité.

Comme dans le cas élastique, on observe que les hausses de densité ralentissent les ondes tandis que l'augmentation de la raideur du milieu accélèrent celles-ci.

Concernant l'atténuation :

- Une augmentation de la porosité augmente l'atténuation, mais pas de manière significative pour les ondes Pf et S.
- La perméabilité et la viscosité ont toujours un effet inverse sur les ondes Pf et S : Une forte perméabilité va entraîner une forte atténuation. Dans le cas de l'onde Ps,  $\eta_f$  entraîne une forte hausse de l'atténuation tandis que l'influence de  $k_0$  est minime.
- Les densités jouent un rôle fort sur l'atténuation pour les ondes Pf et S. Le facteur de



**Figure 1.7:** Influence (en %) d'une variation de 10 % des paramètres  $\phi$ ,  $k_0$ ,  $\rho_f$ ,  $\rho_s$ ,  $K_s$ ,  $G_s$ ,  $K_f$ ,  $cs$  et  $m$  sur les vitesses (gauche) et sur l'atténuation (droite) des ondes  $Pf$  (haut),  $Ps$  (milieu) et  $S$  (bas).

qualité augmente avec  $\rho_f$  et diminue avec  $\rho_s$  pour l'onde Pf, l'inverse se produisant pour l'onde S.

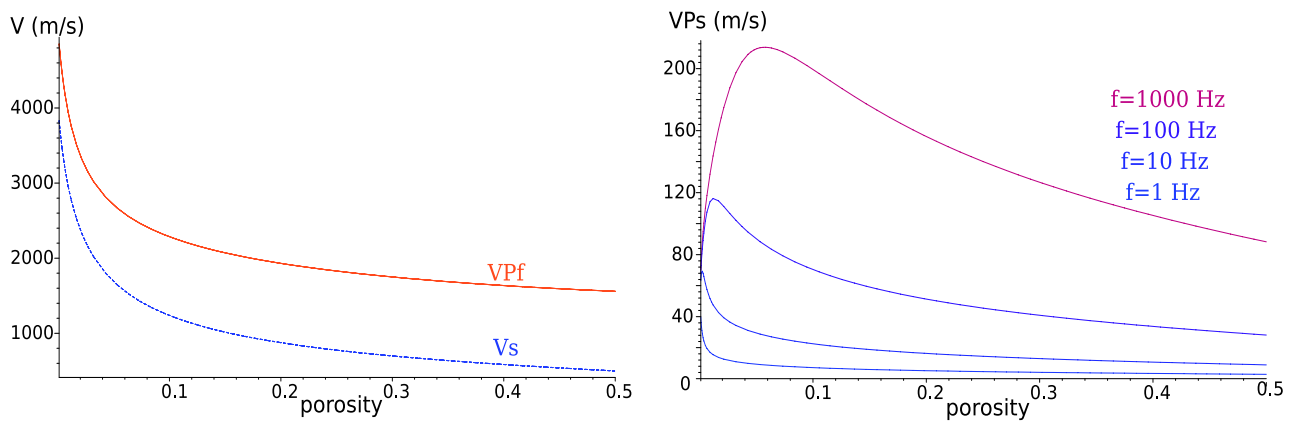
- Les paramètres mécaniques du solide et du fluide n'ont quasiment aucune influence sur  $Q_S$  et  $Q_{Ps}$ . Pour l'onde de compression rapide, une augmentation de  $K_f$  fait diminuer le facteur de qualité, au contraire des paramètres du minéral.
- Enfin le paramètre de cimentation  $m$  a une influence primordiale sur  $Q_{Ps}$ , le faisant augmenter fortement.

Il est cependant important de noter que la perméabilité, les caractéristiques du fluide ou la consolidation peuvent varier de plusieurs ordres de grandeurs, tandis que les paramètres des minéraux varient peu.

Les paramètres les plus influents sur l'atténuation sont donc la perméabilité et la viscosité du fluide. Quant aux vitesses, elles dépendent très fortement des paramètres mécaniques du solide et du fluide.

### Variation de la vitesse en fonction de la porosité

De nombreux auteurs ont essayé de trouver des relations empiriques reliant simplement les vitesses à la porosité (Domenico, 1976; Castagna et al., 1985; Knackstedt et al., 2005, par exemple). De manière prévisible, la figure 1.8 montre une décroissance des vitesses



**Figure 1.8:** Vitesse des ondes Pf et S (gauche) et Ps (droite) pour des fréquences de 1, 10, 100, 1000 Hz (inférieure à la fréquence de coupure) en fonction de la porosité.

des ondes Pf et Ps lorsque la porosité augmente. Lorsque  $\phi$  tend vers 0, les modules  $K_U$ ,  $K_D$  et  $G$  tendent vers les propriétés du minéral et sont donc maximaux. En première approximation, on peut considérer que la variation relative de vitesse est égale à celle de la porosité :

$$\frac{\Delta V}{V} = -\alpha \frac{\Delta \phi}{\phi} \quad (1.35)$$

$\alpha$  vaut environ 0.5 pour les ondes S et Pf.

Au contraire, l'onde Ps a un comportement vis à vis de la porosité beaucoup plus complexe et fortement dépendant de la fréquence. En effet, sa vitesse va décroître avec la porosité uniquement lorsque la fréquence est éloignée de la fréquence de coupure. Sinon, sa vitesse commence par croître avant de décroître.

## 1.4 Ondes mécaniques dans des théories plus complexes : expliquer l'atténuation ?

L'atténuation de Biot due aux mouvements du fluide se vérifie relativement bien dans des milieux saturés à fortes porosités et perméabilités. C'est le cas par exemple dans des sables ou des empilements de sphères (verres...). Ce mécanisme est cependant loin d'expliquer toute l'atténuation dans les milieux réels, en particulier aux fréquences sismiques (1-200Hz). De plus, cette théorie est valide pour un milieu homogène.

D'autres mécanismes sont à prendre en compte, en particulier lorsque la matrice (double porosité) ou le fluide est polyphasique. Des hétérogénéités mésoscopiques, c'est-à-dire de taille supérieure à la taille des grains et inférieure aux longueurs d'onde sont aussi à considérer.

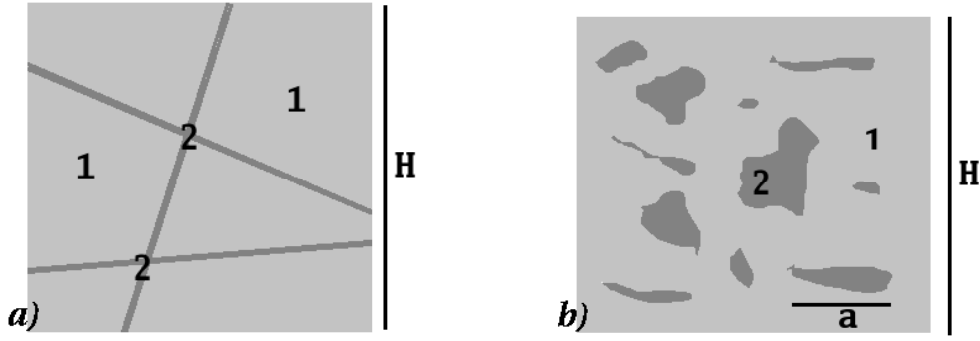
### 1.4.1 Théorie de la double porosité

Dans la théorie de la double porosité, la matrice poreuse est biphasique à une échelle mésoscopique. Deux phases poreuses cohabitent. Le milieu poreux est en effet souvent constitué de plusieurs types de porosités.

Par exemple, un grès fracturé aura une porosité de pores à l'échelle du grains et une porosité de fracture plus étendue. La première phase sera caractérisée par une matrice rigide, à forte porosité et faible perméabilité (pores). Cette phase est appelée porosité de stockage dans l'étude des réservoirs. La deuxième phase a une matrice plus compressible et une perméabilité élevée (fracture) (cf. 1.9a)). C'est la phase de transport.

Un autre exemple est la présence d'hétérogénéités moins poreuses dans une matrice possédant des vides plus importants. C'est le cas par exemple de lentilles argileuses dans un sable (cf. 1.9b)). De nombreux auteurs (Berryman et Wang, 2000; Bai, 1999; Masson et Pride, 2007) ont calculé les vitesses ou modélisé la propagation des ondes dans ce type de milieu. La démarche présentée ici est celle de Pride et Berryman (2003a,b).





**Figure 1.9:** Deux exemples de milieu à double porosité : a) porosité de pores (1) et porosité de fissures (2) ; b) inclusion peu poreuse (2) dans matrice poreuse (1).

Chaque phase  $i$  occupe un volume  $V_i$  du volume total  $V_T$ . On définit une fraction volumique  $v_i = V_i/V_T$ , ( $i = 1, 2$ ). Elle suit localement les lois de Biot (eq. 1.24). Les équations macroscopiques s'obtiennent par moyenne volumique. Il est nécessaire de définir un déplacement fluide et une pression interstitielle  $P_i$  pour chaque phase. Les pressions interstitielles sont alors relié par :

$$\zeta_{int} = \gamma(\omega)(P_1 - P_2) \quad (1.36)$$

$\zeta_{int}$  représente le taux moyen de fluide transféré de la phase 1 vers la phase 2. Il caractérise l'écoulement mésoscopique.  $\gamma(\omega)$  est le coefficient de transport interne. L'existence de deux déplacements fluides entraînent la définition d'une onde de compression lente dans chaque milieu (Berryman et al., 2002).

L'approche suivie par Berryman et al. (2002) ou Pride et Berryman (2003a) est de considérer un milieu équivalent à une seule porosité. Il s'agit donc de calculer  $K_U$ ,  $K_D$  et  $B$  pour ce nouveau milieu à intégrer dans les lois de Biot. Pour cela, il est nécessaire de prendre des hypothèses simplificatrices fortes.

Pride et Berryman (2003a) considèrent que le milieu 2 est entièrement inclus dans le milieu 1 (cf. 1.9b)). La résultante sur le volume d'homogénéisation de la circulation du fluide 2 est donc nulle. Il est ainsi aisé d'éliminer la pression interstitielle de la phase 2 et de se ramener à un milieu simple ayant comme caractéristiques mécaniques :

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_D(\omega)} &= a_{11} - \frac{a_{13}^2}{a_{33} - \gamma(\omega)} \\ B(\omega) &= \frac{-a_{12}[a_{33} - \gamma(\omega)] + a_{13}[a_{23} + \gamma(\omega)]}{[a_{22} - \gamma(\omega)][a_{33} - \gamma(\omega)] - [a_{23} + \gamma(\omega)]^2} \\ \frac{1}{K_U(\omega)} &= \frac{1}{K_D(\omega)} + B(\omega) \left( a_{12} - a_{13} \frac{a_{23} + \gamma(\omega)}{a_{33} - \gamma(\omega)} \right) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Les constantes  $a_{ij}$  ( $i=1,3$  et  $j=1,3$ ) sont réelles et indépendantes de la fréquence. Seul  $\gamma(\omega)$  est complexe et dépendant de la fréquence.

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{K_D} \\
 a_{22} &= \frac{v_1 \alpha_1}{K_1} \left( \frac{1}{B_1} - \alpha_1 \frac{1 - q_1}{1 - K_1/K_2} \right) \\
 a_{33} &= \frac{v_2 \alpha_2}{K_2} \left( \frac{1}{B_2} - \alpha_2 \frac{1 - q_2}{1 - K_2/K_1} \right) \\
 a_{12} &= -v_1 q_1 \alpha_1 / K_1 \\
 a_{13} &= -v_2 q_2 \alpha_2 / K_2 \\
 a_{23} &= \frac{-\alpha_1 \alpha_2 K_1 / K_2}{(1 - K_2/K_1)^2} \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2} \right)
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Les constantes  $q_1$  et  $q_2$  sont données par :

$$q_1 = \frac{1}{v_1} \frac{1 - K_2/K}{1 - K_2/K_1} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{1}{v_2} \frac{1 - K_1/K}{1 - K_1/K_2} \tag{1.39}$$

Les modules  $B_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $K_i$  sont respectivement les modules de Skempton, le coefficient de Biot-Willis, et le module drainé de la phase  $i$ . Le paramètre  $K$  est le module drainé moyen du milieu biphasique composite. Un choix simple est de considérer la moyenne harmonique  $1/K = 1/K_1 + 1/K_2$  pour estimer ce paramètre. Dans ce cas, on a  $q_1 = q_2 = 1$  et  $a_{23} = 0$ . Enfin, le coefficient de transport interne est donné par :

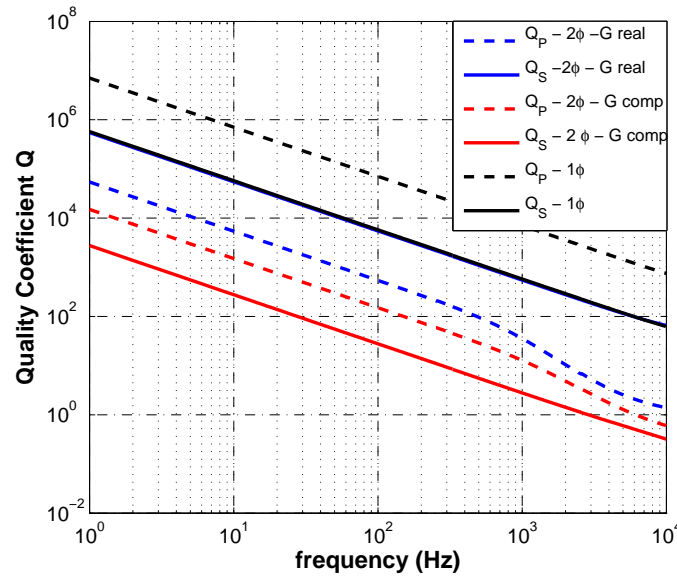
$$\begin{aligned}
 \gamma(\omega) &= \frac{\gamma_m}{i\omega} \sqrt{1 - i \frac{\omega}{\omega_m}} \\
 \gamma_m &= \frac{v_1 k_1}{\eta L_1^2} \left( 1 + O(k_1/k_2) \right) \\
 \omega_m &= \frac{B_1 K_1 k_1 v_1^2 (V/S)^2}{\eta \alpha_1 L_1^4} \left( 1 + \sqrt{\frac{k_1 B_2 K_2 \alpha_1}{k_2 B_1 K_1 \alpha_2}} \right)
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

$L_1$  est la distance dans la phase 1 nécessaire pour que le gradient de pression s'annule.  $S$  est la surface de contact entre la phase 1 et 2 dans le volume  $V$ .  $S$  et  $V$  peuvent être reliés à la taille caractéristique des inclusions de la phase 2 en supposant ces inclusions sphériques :  $V/S = a/(3 v_2)$ . Enfin,  $k(\omega)$  est calculé par une moyenne harmonique.

La correction apportée sur les paramètres  $K_U$  et  $K_D$  n'influe que sur l'atténuation des ondes Pf et Ps. Pour garder une certaine cohérence entre l'atténuation des ondes P et S, il faut que  $G$  soit complexe et dépende de la fréquence. Pride (2005) ne donne pas d'expression pour recalculer  $G$ . La manière la plus triviale est d'imposer à  $G$  la même dépendance fréquentielle que celle de  $K_D$ . Le test de différentes expressions m'ont conduit à considérer les parties imaginaires de  $G(\omega)$  et  $K_D(\omega)$  égales :

$$G(\omega) - G = K_D(\omega) - K_D \tag{1.41}$$

La figure 1.10 présente la variation du facteur de qualité dans la partie basses fréquences. On constate que l'atténuation est beaucoup plus forte dans cette théorie que



**Figure 1.10:** Atténuation calculée pour les ondes Pf (noté P) et S pour 3 cas : 1φ) modèle simple porosité de Biot (1956) ; 2φ) modèle double porosité de Pride et Berryman (2003a) avec G réel et indépendant de la fréquence, ou avec G calculée corrigée par équation 1.41.

dans la théorie de Biot seule. Seul le coefficient de transport interne est complexe et dépendant de la fréquence. L'atténuation supplémentaire à celle de la théorie de Biot est donc uniquement due aux mouvements de fluide entre la zone 1 et 2 et à l'onde de diffusion de pression que cela implique. Le facteur de qualité est relativement cohérent avec ceux mesurés dans la réalité.

### 1.4.2 Atténuation par empilement de couches minces

Lorsque le milieu est constitué d'empilement de couches fines, deux autres mécanismes entrent en jeu dans l'atténuation : le “scattering” et les circulations de fluide entre deux couches aux propriétés hydrauliques différentes. Le “scattering” a été étudié dans le cas élastique (O'Doherty et Anstey, 1971). Il s'agit d'un phénomène de diffusion (réflexion et transmission) multiple sur les interfaces, ce qui crée des interférences constructives ou destructives. Shapiro et al. (1994) donne une expression du facteur de qualité en fonction de la variance  $S$  du paramètre considéré ( $V_P$  ou  $V_S$ ), du nombre d'ondes  $k$  et de l'épaisseur des couches  $h$  :

$$Q_{scat}^{-1} = S \frac{kh}{1 + k^2 h^2} \quad (1.42)$$

Cet effet est totalement indépendant des phénomènes de poro-élasticité.

Dans la théorie de Biot (1956), l'atténuation est produite par les mouvements relatifs fluide-solide dans un matériau homogène. Dans un milieu stratifié s'ajoute à cet effet des

mouvements de fluide des couches les plus compressibles vers celles plus raides au passage d'une onde (Gelinsky et al., 1998; Gurevich et al., 1997; Pride et al., 2002). Ce mouvement de fluide correspond à la propagation d'ondes P-lentes générées aux interfaces (Plona, 1980; Rasolofosaon, 1988). Il est alors possible de calculer un facteur de qualité pour la propagation d'une onde dans un empilement de couches. Il est fonction de l'épaisseur des couches, des caractéristiques mécaniques et des perméabilités. L'atténuation présente alors un pic qui peut se situer dans la gamme des fréquences sismiques. Pride et Garambois (2002) montrent que cet effet est le mécanisme d'atténuation dominant à basses fréquences dans des bassins sédimentaires.

La modélisation des ondes sismiques en milieu poreux stratifié plan par des méthodes de réflectivité (cf. chap. 2) tient implicitement compte de ce mécanisme.

### 1.4.3 Mécanisme de “s squirt flow”

La théorie de Biot (1956) est valide en milieu isotrope. Or les grains ne le sont généralement pas et en particulier des microfissures les parcourent. Ces fissures sont des directions privilégiées de circulation des fluides. Ces écoulements sont surnommés “s squirt flow” (Mavko et Jizba, 1991; Dvorkin et al., 1995). Ce phénomène va surtout introduire une atténuation des ondes sismiques fortes à très hautes fréquences. Il peut être modélisé en considérant les modules mécaniques du milieu poreux comme complexes et dépendant de la fréquence. Plusieurs expressions de  $K_U$  existent pour prendre en compte cet effet. Mavko et Jizba (1991) ont calculé l'expression de  $K_U$  à très haute fréquence, puis Dvorkin et al. (1995) ont étendu ces relations pour toutes les fréquences intermédiaires. Pride (2005) utilise une démarche similaire à celle utilisée pour calculer les relations de double porosité.

Dans la gamme de fréquences sismiques, l'atténuation des ondes expliquée par ce mécanisme est très faible.

### 1.4.4 Atténuation en milieu non saturé

La théorie de Biot (1956) et les relations de Gassmann [1951] sont valides pour un milieu saturé. Lorsque le milieu n'est plus saturé, un des moyen de contourner cette difficulté est de considérer un fluide moyen en utilisant les équations (1.9) (Domenico, 1976). Le fluide biphasique est donc considéré comme homogène. Les vitesses sismiques prédites sont globalement correctes, sauf pour des saturations proches de 0 ou de 1. En revanche, l'atténuation est très mal expliquée dans ce cas là.

White (1975) puis Dutta et Odé (1979) considèrent que le milieu imparfaitement saturé en fluide 1 contient des sphères (“patch”, d'où “patchy saturation”) saturé en fluide 2. Ces sphères sont de dimensions supérieures à la dimension des pores et inférieures aux

longueurs d'ondes (échelle mésoscopique). La limite entre les deux fluides est constituée d'une série de ménisques entre les grains liés aux forces de capillarité. Il est alors possible de recalculer les modules macroscopiques non drainés (Dutta et Seriff, 1979; Johnson, 2001). Pride (2005) utilise le formalisme de la théorie de la double porosité pour calculer ces nouveaux modules.

D'autres théories existent pour prendre en compte tous les phénomènes de la saturation imparfaite dans l'atténuation des ondes sismiques. Le mécanisme de "squeezing" (Johnson et al., 1979; Tamura et al., 2002) est lié aux oscillations et résonances de bulles d'air piégés dans un milieu poreux pratiquement saturé en fluide plus visqueux.

### 1.4.5 Autres sources d'atténuation

D'autres sources d'atténuation existent, qui ne sont pas pris en compte dans cette étude.

**Pertes par friction-plasticité :** Le passage de l'onde sismique entraîne un glissement entre grains ou le long des fractures rocheuses (Walsh, 1966). Ce mécanisme est décrit par la loi de Coulomb. Le facteur de qualité est ici constant avec la fréquence, ce qui correspond à certaines mesures dans du rocher sain. Cependant, ce mécanisme dépend de l'amplitude des ondes, et est négligeable en géophysique (Mavko, 1979).

Le passage des ondes sismiques entraîne une augmentation de contraintes, notamment de la pression fluide. Ces contraintes peuvent ouvrir ou fermer des fissures dans la matrice rocheuse déjà fragile, ou entraîner des micro-craquements au niveau du contact entre les grains. Le matériau n'a pas un comportement purement élastique mais devient plastique au passage de l'onde.

**Pertes thermo-élastiques :** Une part de l'énergie élastique apportée par les ondes se transforme en chaleur qui se dissipe (Savage, 1966).

**Diffraction :** Les phénomènes de diffraction deviennent importants lorsque les longueurs d'ondes sont proches de la taille des grains. Ce phénomène n'est pas pris en compte par la théorie de Biot (1956) et n'intervient pas ici.

**Conversion sismo-électro-magnétique :** Une partie de l'énergie des ondes sismiques va se convertir en ondes électriques et magnétiques. (Garambois et Dietrich, 2002; Bordes et al., 2006)

### 1.4.6 Conclusion

L'atténuation des ondes sismiques est due à des phénomènes à différentes échelles :

- microscopique : mécanisme de squirt flow, phénomène de squeezing...
- mésoscopique : circulation de fluide entre couches, modèle de double porosité...
- macroscopique : poro-élasticité de Biot (1956), modèle de saturation imparfaite, conversion sismo-électromagnétiques...

Pride et al. (2004) ou Carcione et al. (2006) ont montré que les mécanismes d'atténuation dominant sont liés aux circulations de fluide dus aux passages de l'onde. En particulier, les circulations de fluide à une échelle mésoscopique sont les phénomènes entraînant le maximum d'atténuation dans la gamme de fréquence sismique. Cependant, aucun mécanisme n'est capable d'expliquer l'atténuation à toutes les fréquences pour tous les milieux. L'utilisation conjointe de ces mécanismes le peut certainement. L'importance de chaque mécanisme dépend du type de roches, de sa saturation, des pressions auxquels il est soumis, de la fréquence de l'excitation... Le modèle idéal pour comprendre l'atténuation doit tenir compte de tout ces effets.

Seule l'atténuation par empilement de couches minces est considérée dans les études de sensibilité et l'inversion dans cette thèse. Ce mécanisme est en effet inclus dans le calcul matriciel servant à résoudre les équations de la poro-élastodynamique.

## 1.5 Conclusion

Nous avons présenté les différents paramètres permettant de caractériser les deux phases du milieu poreux et leurs interactions. Les équations de Gassmann (1951) relient les propriétés du fluide, du solide drainé et non drainé. La théorie de Biot (1956) a été reprise, améliorée et justifiée par de nombreux auteurs. Elle permet de décrire la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux. La spécificité de cette théorie, par rapport à une théorie élastique, réside dans l'existence de 3 ondes. Les ondes Pf et S ont sensiblement les mêmes propriétés que les ondes élastiques, tandis que l'onde Ps est associée à la diffusion de la pression fluide. L'autre particularité de cette théorie est l'explication d'une partie de l'atténuation. Le mécanisme principal est dû aux circulations de fluide à différentes échelles.

Plusieurs difficultés apparaissent par rapport au cas élastique. La première est la multiplicité des paramètres intervenant dans ces équations, et la nécessité de considérer le milieu à la fois à une échelle microscopique et macroscopique. Les phénomènes pris en compte sont complexes et dépendants du matériau. Il n'existe pas une théorie poro-élastique universelle, et de plus, les notations varient beaucoup selon les auteurs, ce qui rend difficile

les comparaisons entre ces théories.

Cependant, ces théories poro-élastiques permettent d'explicitier le rôle des paramètres du fluide et de la lithologie dans la propagation des ondes sismiques. Elles permettent de modéliser les ondes sismiques, ce qui est très utiles pour des études de sensibilité.





# Chapitre 2

## Modélisation de la propagation des ondes en milieu poro-élastique

### Sommaire

---

2.1	Introduction . . . . .	51
2.2	Modélisation des ondes sismiques par les techniques de Kennett [1979] et Bouchon [1977] . . . . .	53
2.3	Modélisation numérique de sismogrammes en milieu poro-élastique stratifié plan : Vérifications . . . . .	64
2.4	Conclusion . . . . .	70

---

### 2.1 Introduction

Résoudre les équations de la poro-élasticité pour modéliser des sismogrammes synthétiques a plusieurs avantages. Cela permet d'étudier la sensibilité des ondes aux différents paramètres ou de comparer les observations faites sur le terrain pour valider et donner des limites aux modèles utilisés. Enfin, c'est un outil indispensable pour effectuer une inversion.

#### Etat de l'art

Les méthodes de résolution des équations de la poroélasticité ont toutes été inspirées et validées par le cas élastique. Il existe deux grandes familles de méthodes pour modéliser la propagation d'ondes en milieu poreux : des méthodes approchées permettant de résoudre ce problème en milieu hétérogène (différences finies, ...) et des solutions plus exactes pour des modèles latéralement invariants par des techniques de réflectivité.

La résolution par différences finies a été traitée par Dai et al. (1995) ou Carcione (1996)

en deux dimensions pour des milieux saturés et pour des milieux non saturés (Carcione et al., 2004). Les principaux inconvénients de cette méthode résident dans les problèmes de dispersion numérique entre les différents points de la grille et aux difficultés liées à la prise en compte des conditions aux limites (surface libre) et des interfaces. De plus la très grande différence de vitesse entre les deux ondes de compression cause des difficultés pour prendre en compte l'onde P-lente.

Les méthodes de réflectivité consistent à raisonner en termes de potentiels ou de déplacements et contraintes au sein de couches homogènes et de les propager de la source aux capteurs en utilisant un assemblage de coefficients de réflexion et transmission. Haartsen et Pride (1997) ou Lu et Hanyga (2004) utilisent pour cela des techniques de transmission-réflexion inspirées des méthodes de Thomson-Haskell (Thomson, 1950; Haskell, 1953) en milieu poreux stratifié plan.

Garambois (1999) et Pride et al. (2002) ont résolu ce problème en utilisant les techniques de réflectivité proposées par Kennett et Kerry (1979) couplées avec la méthode d'intégration en nombres d'ondes discrets de Bouchon et Aki (1977). Garambois (1999) a modélisé le problème complexe de la conversion sismo-électro-magnétique en milieu poreux.

Les avantages de ces méthodes résident dans le fait de pouvoir considérer tout type de géométrie source-récepteur et des sources ponctuelles orientées ou explosives, en conservant ou non les ondes directes et les ondes de surface. Enfin, cette méthode fournit des solutions rapidement avec une très bonne précision numérique. Par contre, le modèle est stratifié plan.

J'ai écrit un code de propagation d'ondes en milieu poreux, en m'inspirant du code élastique de Dietrich (1988) (Moinet, 1997) et de la version sismo-électromagnétique de Garambois (1999). Alors que Dietrich (1988) propage quatre potentiels (deux descendants et deux montants) et Garambois (1999) huit, le problème est résolu ici avec six potentiels. J'ai essayé de garder le plus possible une démarche analytique, en particulier dans le calcul des matrices de réflexion-transmission, ce qui permet d'éviter des problèmes d'instabilités numériques. Enfin, par rapport à la version de Garambois (1999), j'ai rajouté certaines fonctionnalités : les problèmes de sismique marine peuvent être résolus en intégrant une couche d'eau en surface, la théorie de la double porosité (cf. chap. 1) a été introduite et testée, une version du code nécessite l'entrée des paramètres de deux fluides pour l'étude des milieux non saturés... J'ai aussi adapté ce code pour l'étude du stockage de dioxyde de carbone (cf. chap. 3), en intégrant le calcul des propriétés mécaniques du fluide en fonction de la profondeur.

La première section de ce chapitre sera consacrée aux grands principes de la méthode de réflectivité de Kennett (1983). La résolution, effectuée dans le domaine fréquence-nombre

d'onde, fait intervenir des termes de sources et des matrices de coefficients de réflexion et de transmission. Les sismogrammes sont ensuite ramenés dans le domaine temporel par la méthode d'intégration de Bouchon et Aki (1977). Dans la deuxième partie de ce chapitre, quelques modélisations numériques permettent de valider le code et de regarder les spécificités des propriétés des ondes en milieu poro-élastique, c'est-à-dire l'atténuation et la présence de l'onde Ps.

## 2.2 Modélisation des ondes sismiques par les techniques de Kennett [1979] et Bouchon [1977]

La technique de réflectivité développée par Kennett et Kerry (1979) raisonne en termes de potentiels des déplacements et contraintes, ce qui la rend numériquement plus stable que les autres méthodes de réflectivité. La résolution du problème dans le domaine fréquence-nombre d'ondes permet de considérer des vitesses sismiques complexes, et donc de tenir compte de l'atténuation et de la dispersion. L'intégration en nombres d'ondes discrets proposée par Bouchon (1981) est un moyen efficace de revenir dans le domaine temps-fréquence. La combinaison de ces deux méthodes a notamment été utilisée par Yao et Harkrider (1983) et Dietrich (1988) dans le cas élastique. Enfin, la modélisation numérique des ondes sismiques en milieu poreux a été réalisée par cette méthode par Garambois et Dietrich (2002). Les développements qui vont suivre sont basés sur cette démarche.

### 2.2.1 Nouvelle écriture des équations de Biot (1956)

En milieu stratifié plan latéralement homogène, le système d'équations macroscopiques 1.26 peut se séparer en deux systèmes d'équations différentielles matricielles du premier ordre (Garambois, 1999; Haartsen et Pride, 1997). Ces deux systèmes se réfèrent au cas  $P-SV$ , où des couplages entre les ondes Pf, Ps et SV apparaissent et au cas  $SH$ . Ils sont de la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} = \mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{F} . \quad (2.1)$$

Dans cette équation,  $\mathbf{B}$  représente un vecteur colonne contenant les déplacements et les contraintes.  $\mathbf{F}$  est le vecteur force extérieure. Deux excitations sont nécessaires et complémentaires pour représenter une source sismique. La première ( $F_1$ ) excite tout le milieu poreux (squelette et fluide) et est liée à une discontinuité dans le champ de contraintes et de pression de confinement. La seconde ( $F_2$ ) n'agit que sur la phase fluide et est associée à une différence de pression interstitielle.

Pour obtenir cette décomposition, il est nécessaire d'adopter la démarche de Hudson (1969). Les équations macroscopiques sont transférées dans le domaine fréquentiel, puis

un changement de coordonnées est effectué pour passer en coordonnées cylindriques. De nouveaux déplacements, contraintes et forces sont introduits de manière à décomposer les termes radiaux et tangentiels en éléments appartenant au plan  $P - SV$  et  $SH$ . Il est alors possible d'écrire les équations macroscopiques sous la forme de l'équation (2.1) en effectuant un passage dans le domaine des nombres d'ondes  $k$  et un nouveau changement de variables destiné à homogénéiser leurs dimensions.

### Cas $P - SV$

Pour modéliser la propagation des ondes P et SV en milieu poro-élastique, le système est de dimension 6, tandis qu'il est de dimension 4 pour la propagation élastique et 8 si l'on prend en compte les couplages électro-sismiques :

$$\mathbf{B}^{PSV} = ( V \ U \ W \ \hat{\tau}_r \ \hat{\tau}_z \ -\hat{P} )^T . \quad (2.2)$$

Dans le domaine  $(\omega, k)$ ,  $V$  est le déplacement solide horizontal,  $U$  solide vertical et  $W$  le déplacement fluide vertical.  $\hat{\tau}_r$  est la contrainte horizontale,  $\hat{\tau}_z$  la contrainte verticale et  $\hat{P}$  la pression interstitielle fluide. La matrice  $\mathbf{A}$  relie les déplacements et contraintes avec leurs dérivées verticales (cf. eq. (2.1)) :

$$\mathbf{A}^{PSV} = \begin{pmatrix} 0 & -ik & 0 \\ -ik(1 - 2\frac{GM}{\Delta}) & 0 & \\ ik(\frac{\rho_f}{\tilde{\rho}} - 2\frac{GC}{\Delta}) & 0 & 0 \\ -\omega^2 \left( \rho - \frac{\rho_f^2}{\tilde{\rho}} - 4G\frac{k^2}{\omega^2} (1 - \frac{GM}{\Delta}) \right) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\omega^2 \rho & -\omega^2 \rho_f & \\ 0 & -\omega^2 \rho_f & -\omega^2 \tilde{\rho} & \\ \frac{1}{G} & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{M}{\Delta} & -\frac{C}{\Delta} & \\ 0 & -\frac{C}{\Delta} & \frac{H}{\Delta} - \frac{k^2}{\omega^2 \tilde{\rho}} & \\ \dots & 0 & -ik(1 - 2\frac{GM}{\Delta}) & ik(\frac{\rho_f}{\tilde{\rho}} - 2\frac{GC}{\Delta}) \\ -ik & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix} . \quad (2.3)$$

On a introduit  $\Delta = HM - C^2$ .

Le vecteur  $\mathbf{F}^{PSV}$  est donné par :

$$\mathbf{F}^{PSV} = [0, 0, \frac{ik}{\omega^2 \tilde{\rho}} F_{2r}, -F_{1r} + \frac{\rho_f}{\tilde{\rho}} F_{2r}, -F_{1z}, -F_{2z}]^T , \quad (2.4)$$

où  $F_{1r}$  et  $F_{2r}$  sont les composantes horizontales des forces solide et fluide et  $F_{1z}$  et  $F_{2z}$  sont les composantes verticales de ces mêmes forces.

### Cas $SH$

La polarisation transversale de l'onde  $SH$  la rend physiquement découplée des ondes  $P$  et  $SV$ . Sa modélisation nécessite un autre système d'équations. Le vecteur  $\mathbf{B}^{SH}$  et le tenseur  $\mathbf{A}^{SH}$  sont définis par :

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{SH} &= (T \quad \hat{\tau}_T) \\ \mathbf{A}^{SH} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{G} \\ -\omega^2 \tilde{\rho} + k^2 G & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

$T$  et  $\hat{\tau}_T$  représentent respectivement le déplacement solide et la contrainte associés à l'onde  $SH$  dans une direction transversale. Le vecteur  $\mathbf{F}^{SH}$  est :

$$\mathbf{F}^{SH} = [0, \frac{\rho_f}{\tilde{\rho}} F_{2t} - F_{1t}]^T. \quad (2.6)$$

### Valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$

La matrice des valeurs propres de  $\mathbf{A}$  est définie par  $i\omega\mathbf{\Lambda}$ , avec

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda}^{PSV} &= \text{diag}[-q_{Pf}, -q_{Ps}, -q_S, q_{Pf}, q_{Ps}, q_S] \\ \mathbf{\Lambda}^{SH} &= \text{diag}[-q_S, q_S].\end{aligned}\quad (2.7)$$

$q_\xi$  ( $\xi$  désignant les ondes  $Pf$ ,  $Ps$  ou  $S$ ) représente les lenteurs verticales pour chaque type d'onde  $\xi$ . Elle est liée aux lenteurs  $s_\xi$  via le paramètre de raie  $p$  :

$$q_\xi^2 + p^2 = s_\xi^2 \quad (2.8)$$

### 2.2.2 Potentiels des déplacements et contraintes

La matrice  $\mathbf{B}$  peut être exprimée en fonction des vecteurs  $\mathbf{V}$  contenant les potentiels des déplacements des différentes ondes montantes et descendantes.

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{D}\mathbf{V} \\ \text{avec} \quad \mathbf{V}^{PSV} &= [V_U^{Pf}, V_U^{Ps}, V_U^{SV}, V_D^{Pf}, V_D^{Ps}, V_U^{SV}]^T \\ \text{et} \quad \mathbf{V}^{SH} &= [V_U^{SH}, V_D^{SH}]^T\end{aligned}\quad (2.9)$$

$V_U^\xi$  et  $V_D^\xi$  désignent respectivement les potentiels montants et descendants de l'onde  $\xi$ . La matrice  $\mathbf{D}$  est une matrice carrée, choisie comme la matrice des vecteurs propres de  $\mathbf{A}$ .

### Cas $P-SV$

Pour le système  $P-SV$ , la matrice  $\mathbf{D}^{PSV}$  s'écrit dans une couche homogène (Garambois, 1999) :

$$\mathbf{D}^{PSV} = (\mathbf{d}^{+Pf}, \mathbf{d}^{+Ps}, \mathbf{d}^{-SV}, \mathbf{d}^{-Pf}, \mathbf{d}^{-Ps}, \mathbf{d}^{-SV}) \quad (2.10)$$

Les indices + et – correspondent aux ondes ascendantes et descendantes. Pour une onde P ( $\xi = Pf$  ou  $\xi = Ps$ ),

$$d^{\pm\xi} = \begin{pmatrix} p / S_\xi \\ \pm q_\xi / S_\xi \\ \pm q_\xi \beta_\xi / S_\xi \\ \pm 2 i \omega G p q_\xi / S_\xi \\ i \omega S_\xi (H - 2 G p^2 / S_\xi^2 + \beta_\xi C) \\ i \omega S_\xi (C + \beta_\xi M) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Pour les ondes  $SV$ , on a :

$$d^{\pm SV} = \begin{pmatrix} \pm q_S / S_S \\ -p / S_S \\ G S_S \beta_S p / \rho_f \\ \mp 2 i \omega G p q_S / S_S \\ i \omega G (q_S^2 - p^2) / S_S \\ \pm 2 i \omega G p q_S / S_S \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Les termes  $\beta_\xi$  représentent les rapports d'amplitudes des déplacements relatifs fluide sur solide associés à l'onde  $\xi$ .  $S_\xi$  désigne la lenteur de l'onde  $\xi$ . (cf. sect. 1.3.3).

### Cas $SH$

Pour les ondes  $SH$ , la matrice  $\mathbf{D}^{SH}$  est de dimension 2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{SH} &= (\mathbf{d}^{+SH}, \mathbf{d}^{-SH}) \\ \text{avec } \mathbf{d}^{\pm SH} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i\omega G q_S \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

### Décomposition de la matrice $\mathbf{D}$

Dans le cas poro-élastique, il est possible de partitionner la matrice  $\mathbf{D}$  sous la forme :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} M_U & M_D \\ N_U & N_D \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Les sous matrices  $M_U$ ,  $M_D$ ,  $N_U$  et  $N_D$  sont de dimension 3 dans le cas  $P - SV$  et de dimension 1 dans le cas  $SH$ . Elles transforment les potentiels montants ( $_U$ ) ou descendants ( $_D$ ) des ondes en déplacements ( $M$ ) ou contraintes ( $N$ ).

### 2.2.3 Termes de sources

Pour modéliser l'excitation du milieu, un terme de source  $\mathbf{S}$  est introduit. Il correspond à une discontinuité des déplacements et contraintes ( $\mathbf{B}$ ) à une profondeur  $z_s$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(z_s^+) - \mathbf{B}(z_s^-) &= \mathbf{S}(z_s) \\ &= \mathbf{D}(z_s)[\mathbf{V}(z_s^+) - \mathbf{V}(z_s^-)]\end{aligned}\quad (2.15)$$

Ce terme de source est exprimé en potentiel  $\Sigma$  :

$$\Sigma = \mathbf{V}(z_s^+) - \mathbf{V}(z_s^-) = \mathbf{D}^{-1}(z_s)\mathbf{S}(z_s) \quad (2.16)$$

$\Sigma$  peut être partitionné en potentiels montants et descendants. L'expression analytique de ces expressions a été reprise de Garambois (1999) (Norris, 1985; Boutin, 1987). On considère ici une source explosive et des sources ponctuelles orientées. Les termes de source  $F_{ij}$  peuvent être soit fluides ( $i = 2$ ), c'est-à-dire liés à une discontinuité du gradient de pression interstitielle, soit solides ( $i = 1$ ) et dérivés du tenseur des contraintes. Enfin, les sources peuvent être orientées verticalement ( $j = z$ ), horizontalement dans le plan  $P-SV$  ( $j = x$ ) ou horizontalement dans la direction  $SH$  ( $j = y$ ).

#### Source explosive

Une source explosive génère des ondes de compression de manière isotrope. En utilisant la décomposition de Aki et Richards (1980) des sources ponctuelles en combinaison de forces orientées et moments, puis le changement de variables de Hudson (1969), les vecteurs forces pour une source explosive s'écrivent :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{PSV} &= \left[0, 0, \frac{ik}{\omega^2 p} \hat{F}_{2x}, -\hat{F}_{1x} + \frac{\rho_f}{\tilde{\rho}} \hat{F}_{2x}, -\hat{F}_{1z}, -\hat{F}_{2z}, 0\right]^T \\ \mathbf{F}^{SH} &= [0, 0, 0, 0]^T\end{aligned}\quad (2.17)$$

En utilisant la décomposition donnée par Kennett (1983) et en considérant l'égalité des amplitudes des forces fluides et solide, on obtient dans le domaine  $(\omega, k)$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^{PSV} &= M_0 \left[0, \frac{C - M}{HM - C^2}, \frac{C - H}{HM - C^2}, 2ikG \frac{C - M}{HM - C^2}, 0, 0\right] \\ \mathbf{S}^{SH} &= [0, 0, 0, 0]^T\end{aligned}\quad (2.18)$$

$C$ ,  $M$  et  $H$  sont des modules mécaniques du milieu poreux (cf. chap 1).  $M_0 = 2a^3 \hat{\Phi}(\omega) \Delta p / 3$  est la valeur isotrope du tenseur des moments correspondant au relâchement brutal d'énergie dans un volume sphérique de rayon  $a$  (Aki et Richards, 1980). Enfin,  $\hat{\Phi}(\omega)$  représente la signature fréquentielle de la source. En général, j'utiliserai un signal de Ricker, réponse proche de celle engendrée par un coup de marteau.

### Sources ponctuelles orientées

Il est intéressant de modéliser de la même façon l'excitation produite par des sources ponctuelles orientées. En effet, les sources par coups de marteau ou chute de poids sont des sources classiques en prospection sismique. En séparant les excitations de la phase solide ( $F_{1j}$ ) et fluide ( $F_{2j}$ ), on obtient les expressions des vecteurs sources solides  $\mathbf{S}_1$  et fluides  $\mathbf{S}_2$  :

– **Force verticale :**

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_1^{PSV} &= -\frac{\hat{\Phi}(\omega)}{2\pi} [0, 0, 0, 0, F_{1z}, 0]^T \\ \mathbf{S}_2^{PSV} &= -\frac{\hat{\Phi}(\omega)}{2\pi} [0, 0, 0, 0, 0, F_{2z}]^T \\ \mathbf{S}_1^{SH} &= \mathbf{S}_2^{SH} = [0, 0, 0, 0]^T\end{aligned}\tag{2.19}$$

– **Force horizontale selon x :**

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_1^{PSV} &= \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{4\pi} [0, 0, 0, \mp F_{1x}, 0, 0]^T \\ \mathbf{S}_2^{PSV} &= \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{4\pi} \left[ 0, 0, \pm \frac{ip}{\omega \tilde{\rho}} F_{2x}, \pm \left( \frac{\rho_f}{\tilde{\rho}} \right) F_{2x}, 0, 0 \right]^T \\ \mathbf{S}_1^{SH} &= \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{4\pi} [0, iF_{1x}, 0, 0]^T \\ \mathbf{S}_2^{SH} &= \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{4\pi} \left[ 0, -i \left( \frac{\rho_f}{\tilde{\rho}} \right) F_{2x}, 0, 0 \right]^T\end{aligned}\tag{2.20}$$

En pratique, pour la modélisation des ondes sismiques, on considère une seule source résultant de la somme de la source fluide et solide. De plus, les amplitudes des contributions de la source solide ( $F_1$ ) et fluide ( $F_2$ ) sont considérées identique (Garambois, 1999).

$$F_{1j} = F_{2j}, \quad j = x, y \text{ ou } z\tag{2.21}$$

Cette hypothèse est discutée dans la section 2.3.1.

A partir des expressions (2.20), il est facile d'obtenir les expressions pour une force selon  $y$ , en les multipliant par  $-i$ .

## 2.2.4 Coefficients de réflexion-transmission en milieu poreux

### Conditions aux interfaces

La méthode de modélisation numérique utilisée ici repose sur la connaissance des coefficients de réflexion et de transmission en milieu poreux. Plusieurs types de conditions aux limites peuvent être pris en compte pour modéliser les échanges de fluide entre deux milieux séparés par une interface. Les cas extrêmes sont (Deresiewicz et Skalak, 1963; Bourbié et al., 1986) :



- **les interfaces ouvertes**, lorsque tous les canaux communiquent et la circulation du fluide est conditionnée par la perméabilité des deux milieux. La différence de pression interstitielle est alors nulle entre les deux milieux.
- **les interfaces fermées** où l'arrangement des grains bloque toute circulation de fluide au travers de l'interface. Celle-ci est donc étanche et la vitesse de filtration du fluide est nulle.

Les conditions aux interfaces vont permettre de calculer les coefficients de réflexions. La différence entre les deux cas extrêmes va surtout se ressentir dans l'atténuation de l'onde au passage de l'interface (cf section 1.4.2). De nombreux auteurs ont cherché les conditions aux frontières (Deresiewicz et Skalak, 1963; Rosenbaum, 1974; de la Cruz et Spanos, 1989; Gurevich et Shoenberg, 1999) et calculé les coefficients de réflexion et transmission à des interfaces poreux/poreux (de la Cruz et al., 1992; Santos et al., 1992) ou poreux/liquide (Denneman et al., 2002).

Nous considérerons ici toutes les interfaces comme ouvertes, ceci pour la simplicité des coefficients de réflexion. De plus, la condition d'interface ouverte est la seule cohérente avec les équation de Biot (1956). Les interfaces réelles ne suivent pas forcément ce critère et peuvent être partiellement fermées. Il est possible de les prendre en compte en intercalant une fine couche ayant une très faible perméabilité au niveau de l'interface (Gelinsky et al., 1998).

Cette condition d'interface ouverte entraîne la continuité des déplacements ( $U$ ,  $V$  et  $W$  dans le cas  $P - SV$ ) et des contraintes ( $\hat{\tau}_r$ ,  $\hat{\tau}_z$  et  $\hat{P}$ ) à l'interface séparant les deux milieux (Haartsen et Pride, 1997; Garambois, 1999). Pour une interface à la profondeur  $z$ , ces relations de continuité permettent de calculer les coefficients de réflexion-transmission et s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z^-) = \mathbf{B}(z^+) \quad \text{soit} \quad \mathbf{V}(z^-) &= \mathbf{Q}(z^-, z^+) \mathbf{V}(z^+) \\ \text{avec} \quad \mathbf{Q}(z^-, z^+) &= \mathbf{D}^{-1}(z^-) \mathbf{D}(z^+) \end{aligned} \quad (2.22)$$

L'axe vertical  $z$  étant orienté vers le bas, les indices  $-$  et  $+$  désignent respectivement les milieux au-dessus et en dessous de l'interface. La matrice  $\mathbf{Q}$  peut être partitionnée en terme de potentiels d'ondes montantes  $\mathbf{V}_U$  et descendantes  $\mathbf{V}_D$  :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_U(z^-) \\ \mathbf{V}_D(z^-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{UU} & \mathbf{Q}_{UD} \\ \mathbf{Q}_{DU} & \mathbf{Q}_{DD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_U(z^+) \\ \mathbf{V}_D(z^+) \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

### Calcul des coefficients de réflexion poreux/poreux

Les travaux de Kennett et Kerry (1979) permettent de calculer les matrices de réflexion et de transmission pour des ondes incidentes montantes ( $\mathbf{R}_U$  et  $\mathbf{T}_U$ ) ou descendantes ( $\mathbf{R}_D$

et  $\mathbf{T}_D$ ) (Moinet, 1997; Garambois, 1999) :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_D &= \mathbf{Q}_{UD} \mathbf{Q}_{DD}^{-1} \\ \mathbf{T}_D &= \mathbf{Q}_{DD}^{-1} \\ \mathbf{R}_U &= -\mathbf{Q}_{DD}^{-1} \mathbf{Q}_{DU} \\ \mathbf{T}_U &= \mathbf{Q}_{UU} - \mathbf{Q}_{UD} \mathbf{Q}_{DD}^{-1} \mathbf{Q}_{DU}\end{aligned}\tag{2.24}$$

Les matrices de réflexion sont de dimension 3 dans le cas  $P - SV$  et traduisent les réflexions d'ondes incidentes Pf, Ps ou S en ondes transmises ou réfléchies Pf, Ps ou S. Il y a donc 9 coefficients de réflexion-transmission pour chaque cas. Elles sont de dimension 1 dans le cas  $SH$ , où les ondes ne se convertissent pas.

Il est aussi possible d'exprimer l'inverse de la matrice  $\mathbf{D}$  à partir de ses partitions  $M_U$ ,  $M_D$ ,  $N_U$  et  $N_D$  en utilisant les formules d'inversion de matrice par bloc (Pride et al., 2002). Les matrices de coefficients de réflexion-transmission sont donc définies avec les partitions de  $\mathbf{D}$ . Cette méthode a l'avantage de ne pas avoir à inverser de matrice  $6 \times 6$  mais uniquement des matrices  $3 \times 3$ . Enfin, Haartsen et Pride (1997), s'inspirant des travaux en élastique de Garmany (1983), remarquent des propriétés de symétrie de la matrice  $\mathbf{A}$  et les utilisent pour calculer l'inverse de la matrice  $\mathbf{D}$ .

Inversement, il est possible d'exprimer la matrice  $\mathbf{Q}$  en fonction des coefficients de réflexion-transmission.

### Cas de la surface libre

La surface de la terre est dite libre car les contraintes s'annulent dans le cas d'une interface ouverte. Pour le système  $P - SV$ , le vecteur déplacements-contraintes (eq. (2.2)) devient :

$$\mathbf{B}^{PSV}(0) = ( V(0) \quad U(0) \quad W(0) \quad 0 \quad 0 \quad 0 )^T\tag{2.25}$$

La matrice de coefficients de réflexion  $\mathbf{R}_U$  est la seule non nulle. Elle est calculée pour le cas  $P - SV$  ou  $SH$  par :

$$\mathbf{R}_U = -\mathbf{N}_D^{-1} \mathbf{N}_U\tag{2.26}$$

### Cas de l'interface poreux/fluide

Le vecteur déplacements-contraintes dans un milieu purement fluide est :

$$\mathbf{B}^{PSV} = ( V \quad U \quad 0 \quad \hat{P}_c \quad \hat{P}_c \quad \hat{P}_c )^T\tag{2.27}$$

$\hat{P}_c$  est la pression de confinement, soit la partie isotrope de la contrainte. Dans un milieu fluide, une seule pression suffit à caractériser le milieu. La pression interstitielle est donc

considérée égale à la pression de confinement.

Le déplacement solide est égal au déplacement du fluide. Le déplacement relatif du fluide  $W$  est donc nul. Il est alors possible d'estimer la matrice  $\mathbf{D}$  en prenant les paramètres relatifs aux ondes Ps et S nuls.  $C$ ,  $K_U$  et  $K_f$  sont égaux dans ce cas et  $M$  vaut 1.

La méthode utilisée pour le calcul des coefficients de réflexion poreux/poreux n'est cependant pas applicable ici. La matrice  $\mathbf{D}$  obtenue n'est en effet pas inversible.

Cependant, ce problème se résout très bien en faisant tendre  $\phi$  et  $k_0$  vers 1. Le milieu est donc fluide. Dans ce cas, le problème est résolu en considérant que l'onde de volume se propageant dans le milieu fluide est l'onde lente. La vitesse des ondes Pf et S divergent et leur amplitude s'annule.

## 2.2.5 Réponse d'un milieu stratifié plan

### Matrices de transmission-réflexion généralisées

Cette étape consiste à déterminer les coefficients de transmission-réflexion généralisés associés à une couche  $B$  limitée par deux demi-espaces  $A$  et  $C$  aux profondeurs  $z_A$  et  $z_C$  (Kennett, 1983). Les vecteurs potentiels dans la couche A et C peuvent aisément être reliés :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(z_A^-) &= \mathbf{Q}(z_A^-, z_C^+) \mathbf{V}(z_C^+) \\ \text{avec} \quad \mathbf{Q}(z_A^-, z_C^+) &= \mathbf{D}^{-1}(z_A^-) \mathbf{P}(z_A^-, z_C^+) \mathbf{D}(z_C^+) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Si le milieu  $B$  entre  $z_A$  et  $z_C$  est homogène, on a :

$$\mathbf{P}(z_A^-, z_C^+) = e^{(z_A - z_C)\mathbf{\Lambda}} \quad (2.29)$$

Ce terme correspond au déphasage subi par l'onde à la traversée de la couche homogène  $B$ .

Si le milieu entre  $z_A$  et  $z_C$  contient une interface à la profondeur  $z_B$ ,  $\mathbf{P}(z_A, z_C)$  contient le déphasage entre  $z_A$  et  $z_B$  et  $z_B$  et  $z_C$  et l'influence des réflexions et transmissions à l'interface  $z_B$ , c'est-à-dire :

$$\mathbf{P}(z_A^-, z_C^+) = e^{(z_A - z_B)\mathbf{\Lambda}} \mathbf{D}^{-1}(z_B^-) \mathbf{D}(z_B^+) e^{(z_B - z_C)\mathbf{\Lambda}} \quad (2.30)$$

$\mathbf{Q}(z_A^-, z_C^+)$  peut alors s'écrire :

$$\mathbf{Q}(z_A^-, z_C^+) = \mathbf{Q}(z_A^-, z_B^-) \mathbf{Q}(z_B^+, z_C^+) \quad (2.31)$$

On reconnaît la structure  $\mathbf{D}^{-1}(z_B^-) \mathbf{D}(z_B^+)$  qui a permis de calculer les coefficients de réflexion-transmission pour une interface. Or,  $\mathbf{Q}$  peut s'écrire en fonction des matrices de

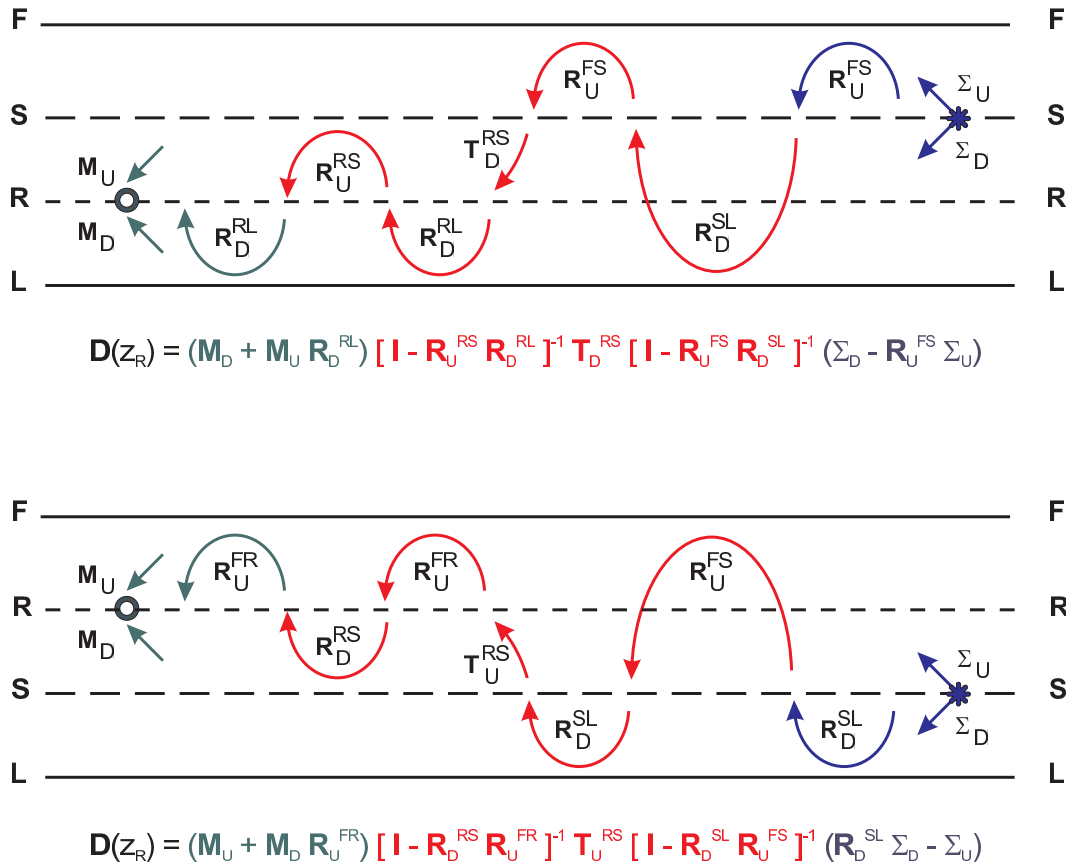
réflexion et transmission. On trouve les matrices généralisées exprimant la propagation à travers la couche  $B$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_D^{AC} &= \mathbf{T}_D^{BC} [\mathbf{I} - \mathbf{R}_U^{AB} \mathbf{R}_U^{BC}]^{-1} \mathbf{T}_D^{AB} \\
 \mathbf{T}_U^{AC} &= \mathbf{T}_U^{AB} [\mathbf{I} - \mathbf{R}_D^{BC} \mathbf{R}_D^{AB}]^{-1} \mathbf{T}_U^{BC} \\
 \mathbf{R}_D^{AC} &= \mathbf{R}_D^{AB} + \mathbf{T}_U^{AB} \mathbf{R}_D^{BC} [\mathbf{I} - \mathbf{R}_U^{AB} \mathbf{R}_D^{BC}]^{-1} \mathbf{T}_D^{AB} \\
 \mathbf{R}_U^{AC} &= \mathbf{R}_U^{BC} + \mathbf{T}_D^{BC} \mathbf{R}_U^{AB} [\mathbf{I} - \mathbf{R}_D^{BC} \mathbf{R}_U^{AB}]^{-1} \mathbf{T}_U^{BC}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Il est ainsi possible de reconstruire par itérations successives la réponse d'un milieu multicouche.

### Assemblage des termes de source, propagation et récepteurs

La réponse sismique d'un milieu poreux stratifié plan s'obtient d'après les équations de Kennett et Kerry (1979) (figure 2.1). La position de la source par rapport au récepteur définit deux formulations différentes. Les indices  $R$ ,  $F$ ,  $S$  et  $L$  désignent respectivement les profondeurs des récepteurs, de la surface libre, de la source et du demi-espace homogène.



**Figure 2.1:** Assemblage des termes de source (droite), des matrices de réflexion-transmission généralisées (centre) et de conversion de potentiels en déplacements (gauche) pour les géométries source au dessus (haut) et en dessous (bas) du capteur, d'après (Kennett, 1983).

Ces équations font subir au terme de source (droite, bleue) de multiples réflexions (termes de réflectivité, milieu, rouge) puis le convertissent de potentiels en déplacements ou contraintes (gauche, vert). L'utilisation de  $\mathbf{M}_U$  et  $\mathbf{M}_D$  permet de convertir les potentiels en déplacement radial  $V$ , vertical  $U$  et fluide vertical  $W$  dans le cas  $P - SV$ . En substituant dans cette expression  $\mathbf{M}_U$  par  $\mathbf{N}_U$  et  $\mathbf{M}_D$  par  $\mathbf{N}_D$ , on aurait accès aux trois informations de contraintes présentes dans  $\mathbf{B}$ . Dans le cas  $SH$  la dimension des matrices ne permet de calculer que le déplacement horizontal  $T$ .

Il est intéressant de noter que toutes les réflexions multiples sont incluses dans ces expressions (Kennett, 1983). En effectuant un développement limité à l'ordre  $n$  des matrices ayant la forme  $[I - X Y]^{-1}$  dans les expressions de la figure 2.1, on obtient l'expression explicite des réflexions multiples à l'ordre  $n$ . En particulier, les diverses réflexions et conversions à la surface libre entre les ondes  $Pf$  et  $SV$  créent des interférences constructives qui génèrent les ondes de Rayleigh. Les ondes de Love sont générées par les réflexions multiples entre la surface et les interfaces en profondeur dans le cas  $SH$ . Enfin, les ondes de Stoneley sont des ondes non propagatives créées par les conversions et réflexions à chaque interface dans le cas  $P - SV$ .

Les réflexions à la surface libre, et donc les ondes de surface, pourront être calculées ou non. De même, les ondes directes sont considérées ou non. Elles sont en effet calculées en substituant dans les expressions de la figure 2.1 les matrices  $[I - X Y]^{-1}$  par la matrice identité.

## 2.2.6 Transformation dans le domaine temps-distance

Les déplacements et contraintes sont obtenus de manière discrète dans le domaine  $(\omega, k)$ . Ils sont ensuite calculés dans le domaine temps distance à partir de cette réponse en ondes planes. La sommation de toutes les contributions va être réalisée par la méthode des nombres d'ondes discrets (Bouchon et Aki, 1977; Bouchon, 1981). Ce passage s'obtient par une transformée de Fourier (fréquence  $\rightarrow$  temps), une transformée de Hankel (nombre d'ondes  $\rightarrow$  espace) ainsi qu'une somme discrète sur les ordres azimutaux  $m$  caractérisant la source. Par exemple, pour obtenir le déplacement selon  $z$  :

$$u_z(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{+\infty} k dk \sum_{m=-N}^N [J_m(kr)U(\omega, k, m, z)]e^{im\theta} \quad (2.33)$$

Dans cette expression,  $J_m(\xi)$  désigne la fonction de Bessel d'ordre  $m$ . Des relations du même type s'appliquent pour retrouver les déplacements  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $w_z$  ainsi que les contraintes  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{\theta z}$ ,  $\tau_{zz}$  et  $P$ . Pour les expressions exactes, on se référera aux travaux de Garambois (1999). La valeur de  $N$  dépend du type de source considérée et de ses propriétés de symétrie. Ainsi, une explosion ou une force selon  $z$  correspond à  $N = 0$ , tandis que  $N$

vaut 1 pour les forces horizontales selon  $x$  ou  $y$ .

Enfin, la dernière étape consiste à passer du repère cylindrique en coordonnées cartésiennes par une projection classique.

## 2.3 Modélisation numérique de sismogrammes en milieu poro-élastique stratifié plan : Vérifications

### 2.3.1 Relations de réciprocité

#### Fonction de Green :

La relation de réciprocité du tenseur de Green constitue une bonne vérification de la validité d'un code numérique. Les fonctions de Green en milieu poreux sont définies par 4 indices pour prendre en compte la composante solide (indice 1) et la composante fluide relatif au solide (indice 2) des déplacements et forces. Ainsi  $G_{ij}^{kl}(z_R; z_S)$  est la fonction de Green correspondant au déplacement de la phase  $i$  ( $i = 1, 2$ ) dans la direction  $j$  ( $j = x, y, z$ ) à la profondeur  $z_R$  généré par une force ponctuelle  $F_{kl}(z_S)$  agissant sur la phase  $k$  ( $k = 1, 2$ ) dans la direction  $l$  ( $l = x, y, z$ ) à la profondeur  $z_S$ . La relation de réciprocité s'écrit :

$$G_{ij}^{kl}(z_R; z_S) = G_{kl}^{ij}(z_S; z_R) \quad (2.34)$$

#### Source fluide et solide ou source unique ?

Garambois (1999) considère que le déplacement est généré par la somme des forces solides et fluides (cf. eq. (2.19) et (2.20). Lorsqu'il vérifie les relations de réciprocité, il s'intéresse à la somme des fonctions de Green générées par une force solide et par une force fluide :

$$S = S_1 + S_2 \quad \Rightarrow \quad G_{ij}^l = G_{ij}^{2l} + G_{ij}^{1l} . \quad (2.35)$$

Il perd ainsi un indice, ce qui simplifie beaucoup le problème.

Cette hypothèse est valide car le déplacement dû à une force fluide  $F_{2j}$  est négligeable devant celui généré par une force solide  $F_{1j}$ , au moins à basses fréquences. Dans la réalité, un coup de marteau ou une explosion produit à la fois une excitation du solide et du fluide. Il ne peut cependant pas vérifier la réciprocité des déplacements fluides générés par une force solide ou fluide et inversement.

Dans les modélisations des déplacements, j'ai donc conservé cette approximation. Cependant, le calcul des Dérivées de Fréchet (cf chap. 4) nécessite le calcul indépendant des fonctions de Green associées aux deux types de force. J'ai donc vérifié la réciprocité des

déplacements fluides ou solides, dus à des forces fluides ou solides.

### Paramètres de modélisation :

Pour vérifier l'égalité (2.34) j'ai utilisé le modèle bicouche présenté dans le tableau 2.1 et constitué d'une couche peu consolidée de 100 mètres d'épaisseur au dessus d'un demi-espace plus dur. Deux géométries sources récepteurs sont considérées, notées cas "up" (upward) et "dn" (downward) (cf table 2.2). La source est toujours située aux abscisses  $X_S = 0$  et  $Y_R = 0$  et les 50 traces sismiques obtenues pour chaque configuration force-déplacement-géométrie sont distantes de 10 m.

$Z$ (m)	$\phi$	$k_0$ ( $m^2$ )	$\rho_f$ ( $kg/m^3$ )	$\rho_s$ ( $kg/m^3$ )	$K_s$ ( $GPa$ )	$K_D$ ( $GPa$ )	$G$ ( $GPa$ )	$K_f$ ( $GPa$ )	$\eta_f$ ( $Pa.s$ )
100	0.4	$10^{-11}$	1000	2700	30	3	5	2.2	0.001
$\infty$	0.1	$10^{-12}$	1000	2700	36	7	7	2.2	0.001

**Table 2.1:** *Modèle bicouche utilisé pour tester la réciprocité des signaux sismiques.*

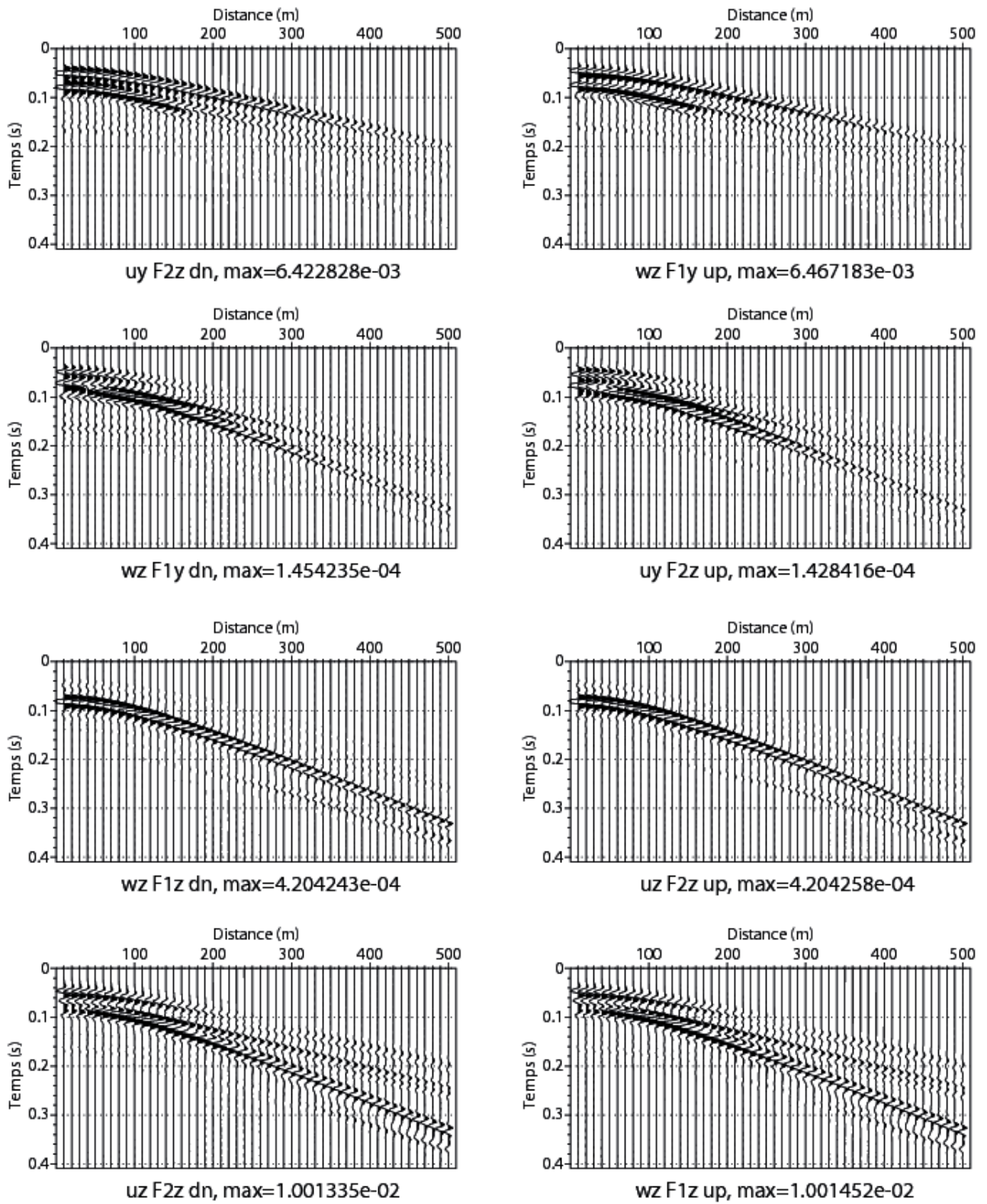
Géométrie	$Z_S$	$Z_R$	$Y_R$	$X_{Rmin}$	$X_{Rmax}$
up	80	0	100	10	500
dn	0	80	-100	-10	-500

**Table 2.2:** *Géométrie source-récepteurs utilisée pour tester la réciprocité des signaux sismiques.*

La figure 2.2 présente les sismogrammes associés au fonction de Green  $G_{2z}^{1y}(z_R; z_S)$ ,  $G_{1y}^{2z}(z_R; z_S)$ ,  $G_{2z}^{1z}(z_R; z_S)$  et  $G_{1z}^{2z}(z_R; z_S)$  et leur réciproque. Les forces solides sont notées  $F_Y$  et  $F_Z$  et celles fluides  $f_Y$  et  $f_Z$ . On note une très bonne correspondance, à la fois dans la forme de l'onde que dans l'amplitude. Le code de propagation est donc validé.

On remarque que dans la gamme des fréquences sismiques, les déplacements solides générés par une force fluide (ou inversement) sont environ 10 à 100 fois plus faibles que pour un agencement solide-solide. De la même façon, les déplacements fluides générés par une force fluide sont encore plus faibles, environ 1000 fois inférieurs aux déplacements solides produits par une force solide.

En utilisant la réciprocité, extraire du déplacement solide l'information générée par une force fluide revient à connaître le déplacement fluide. Ceci est intéressant pour la détermination de la perméabilité (cf. chap. 1). Cependant, l'amplitude du déplacement



**Figure 2.2:** Vérifications de la réciprocité des déplacements pour 4 couples de forces-déplacements différents (de haut en bas) : 1)  $F_{2z} u_y$ , dn et  $F_{1y} w_z$ , up ; 2)  $F_{1y} w_z$ , dn et  $F_{2z} u_y$ , up ; 3)  $F_{1x} w_z$ , dn et  $F_{2z} u_x$ , up ; 4)  $F_{1x} w_z$ , dn et  $F_{2z} u_x$ , up ;



liée à la force fluide est très faible ; cette information sera noyée dans les ondes sismiques générées par la force solide.

### 2.3.2 Comportement haute-fréquence et onde P-lente

Plona (1980) a été le premier à démontrer expérimentalement l'existence de l'onde P-lente. Numériquement il est relativement facile de voir celle ci en se plaçant à haute fréquence. La figure 2.3 présente les sismogrammes obtenus à haute fréquence dans une géométrie particulière permettant de voir l'onde P-lente. Le modèle utilisé pour ce calcul est donné dans le tableau 2.3.

La source est explosive, située dans un milieu semi-infini pratiquement purement élastique (milieu 2). Cette source ne génère que des ondes P. Les ondes P vont se convertir à l'interface pour donner des ondes Pfast, Pslow et S dans le milieu 1. Les différences de vitesses dans le milieu 2 entre les ondes Plente et Pfast (l'onde Pf a une vitesse de 3400 m/s, et celle de l'onde Ps est 100 fois inférieure) font qu'il est possible d'isoler dans le milieu 1 les ondes converties dues uniquement aux ondes Pf incidentes. On ne considère ici uniquement les ondes transmises directes.

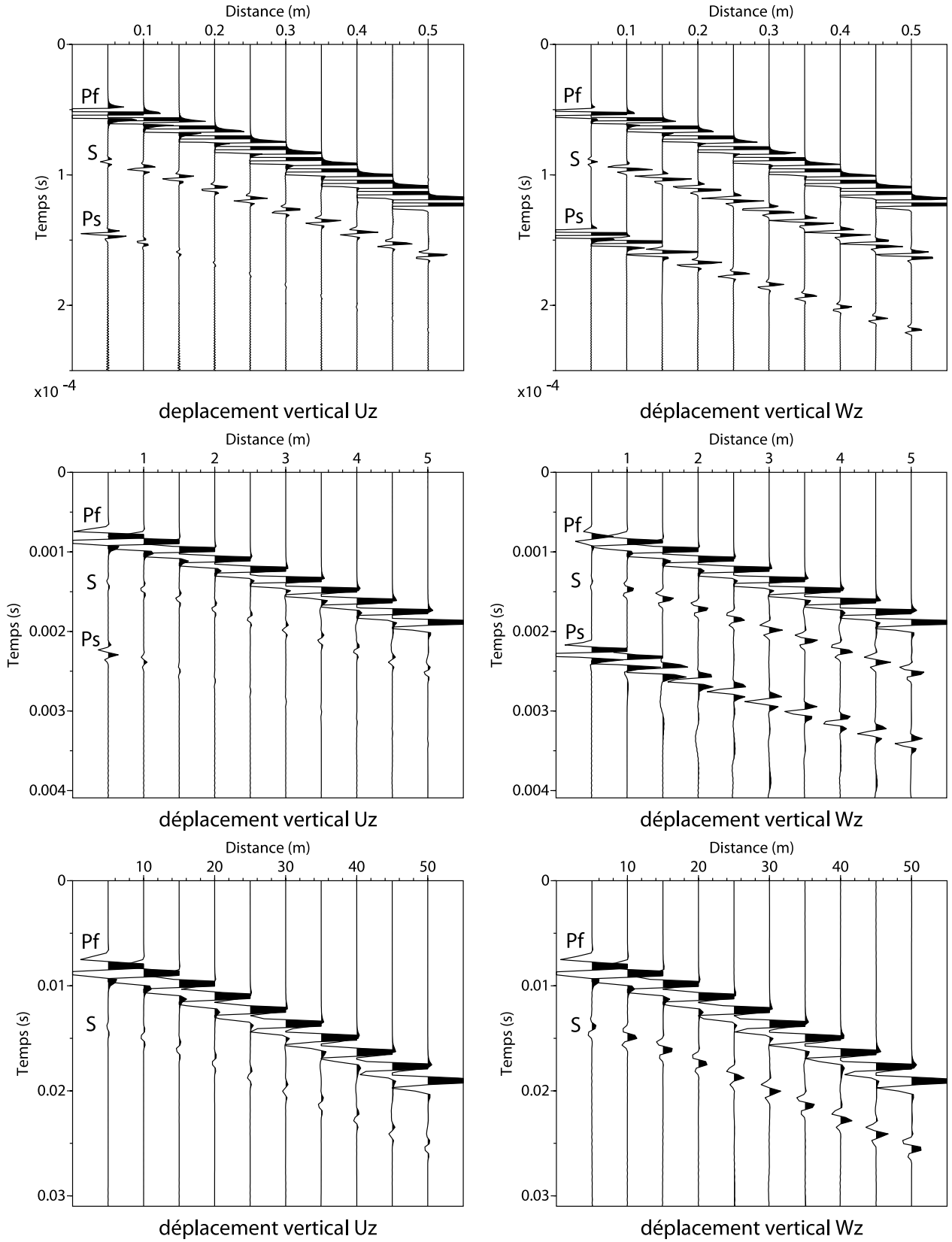
Pour chaque cas, les récepteurs situés dans le milieu 1 enregistrent successivement les ondes Pfast, S et Pslow, pour les déplacements vertical solide et relatif fluide/solide. Les principales caractéristiques de la géométrie et les vitesses des ondes en présence dans le tableau 2.4.

couche	$\phi$	$k_0$ ( $m^2$ )	$\rho_f$ ( $kg/m^3$ )	$\rho_s$ ( $kg/m^3$ )	$K_s$ ( $GPa$ )	$K_D$ ( $GPa$ )	$G$ ( $GPa$ )	$K_f$ ( $GPa$ )	$\eta_f$ ( $Pa.s$ )
1	0.3	$10^{-10}$	1000	2700	37	1	3	2.2	0.001
2	$10^{-4}$	$10^{-14}$	1000	2700	37	5	5	2.2	0.001

**Table 2.3:** Modèle utilisé pour le calcul des 3 couples de sismogrammes de la figure 2.3. La profondeur de l'interface entre le milieu 1 et le milieu 2 est donné dans le tableau 2.4 et le milieu 2 est un milieu semi-infini.

La perméabilité considérée dans le milieu 1 est très forte. Elle n'est valable que pour une grave propre. La fréquence de relaxation  $\omega_c$  dans ce cas est de 261,5 Hz. Pour les trois cas considérés, la fréquence centrale des sismogrammes est donc supérieure à la fréquence de relaxation.

Plus la fréquence est forte, c'est-à-dire plus on se situe dans le régime inertiel, plus l'onde Ps a une amplitude forte par rapport aux ondes Pf et S. Lorsque la fréquence du



**Figure 2.3:** Déplacements verticaux solide  $U_z$  et fluide  $W_z$  pour les cas A (haut), B (milieu) et C (bas). Les ondes en présence (Pfast, Pslow et S) sont indiquées sur les sismogrammes.

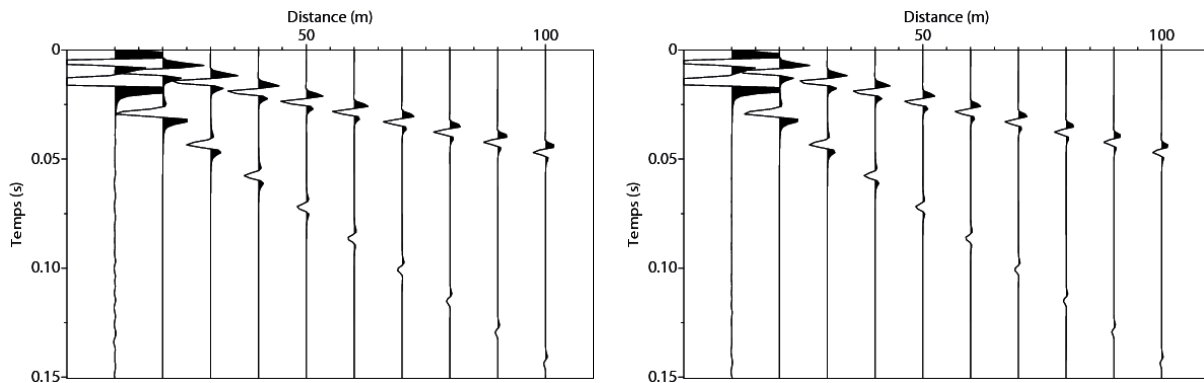
Cas	A	B	C
Freq Ricker	106666	5333	533
Durée sismo. (ms)	.4	8	80
Prof. interface (m)	0.2	2	20
Prof. source (m)	0.25	2.5	25
abscisses récepteurs (m)	.05-0.5	0.5-5	5-50
V Pslow	712.5	702.6	677.6
V Pfast	2235.3	2235.1	2234.7
V S	1216.6	1215.3	1211.8

**Table 2.4:** *Fréquence et durée des sismogrammes, géométrie de la modélisation et vitesses des ondes dans le milieu 1 pour les 3 couples de sismogrammes de la figure 2.3*

sismogramme est proche de la fréquence de coupure, cette onde a déjà une amplitude négligeable. En effet, pour cette fréquence, l'atténuation est plus forte que dans les autres cas et l'onde Ps n'est pratiquement plus propagative. Enfin, dans le régime visqueux, c'est-à-dire dans les fréquences classiques en sismique, l'onde P-lente a une amplitude quasiment nulle. Dans la gamme des fréquences sismiques, les ondes de compression lentes n'apporteront pas d'information sur la porosité, le fluide ou la perméabilité.

L'amplitude des ondes Ps par rapport aux autres ondes est proportionnellement plus forte dans le cas du déplacement fluide que solide, ce qui est cohérent avec son rôle de diffusion de fluide.

### 2.3.3 Atténuation et double porosité



**Figure 2.4:** *Déplacements verticaux calculés avec la théorie de Biot (1956) (gauche) et la théorie de la double porosité (Pride et Berryman, 2003a) (droite).*

J'ai aussi voulu vérifier que l'atténuation était correctement prise en compte dans le

code de propagation et valider la théorie de la double porosité (cf. section 1.4.1) que j'ai introduite dans ce code. La figure 2.4 présente des sismogrammes calculés avec la théorie de Biot (1956) et avec la théorie de la double porosité (Pride et Berryman, 2003a). La source (force verticale) est située à 100 mètres de profondeur et les 10 récepteurs (déplacements verticaux) de 90 à 0 mètres de profondeur. La surface n'est pas considérée dans ce calcul. Les vitesses sont identiques dans les deux cas et la fréquence centrale est de 140 Hz.

Les coefficients d'atténuation sont de 1760 et 620 pour les ondes Pf et S dans la théorie de la simple porosité et de 600 et 190 pour ces mêmes ondes dans la théorie de la double porosité.

Il est rassurant de noter que les ondes calculées avec la théorie de la double porosité ont la même forme que celles calculées par la théorie classique. L'atténuation apparaît légèrement plus forte pour les ondes calculées avec la théorie de la double porosité. L'amplitude maximale (trace 1) du sismogramme calculé avec la double porosité est 1.4 fois plus faible que celle du sismogramme déterminé avec la théorie classique.

Cependant, l'algorithme montre des instabilités numériques et la prise en compte de l'atténuation des ondes S n'est pas optimale (cf. sect 1.4.1). Par conséquent, les études de sensibilité seront menées avec la théorie classique présentée dans le chapitre 1.

## 2.4 Conclusion

La méthode de réflectivité de Kennett (1983) associée à l'intégration en nombres d'ondes discrets de Bouchon et Aki (1977) permet de calculer les sismogrammes synthétiques en milieu poreux. Cette méthode est rapide et numériquement stable. Bien que la géométrie du modèle soit latéralement invariante, la géométrie des sources et récepteurs est à 3 dimensions. Le bon fonctionnement de ce code, inspiré par le code écrit par Garambois (1999) a été vérifié en utilisant la réciprocité des fonctions de Green.

La modélisation des déplacements solides et relatifs fluide/solide à partir des paramètres du milieu poreux présentés au chapitre 1 permet de visualiser des propriétés spécifiques des ondes en milieu poreux, notamment la présence d'une onde P-lente. Je me suis aussi intéressé à l'atténuation et à la résolution des équations de la double porosité.

Enfin, cet outil sert de base pour les modélisations numériques, pour les études de sensibilité avec les dérivées de Fréchet et pour les algorithmes d'inversion utilisés dans la suite de cette thèse.

# Chapitre 3

## Application à la surveillance du stockage de CO<sub>2</sub>

### Sommaire

3.1	Introduction . . . . .	71
3.2	Caractéristiques du fluide . . . . .	73
3.3	Cas du stockage de Sleipner . . . . .	79
3.4	Conclusion . . . . .	89

### 3.1 Introduction

#### Problématique

La combustion des hydrocarbures fossiles génère chaque année plusieurs milliards de tonnes de dioxyde de carbone (CO<sub>2</sub>) qui sont rejetées dans l'atmosphère. Or, ce gaz participe à l'effet de serre de notre planète. Le Groupement Intergouvernemental d'experts sur l'Evolution du Climat (GIEC, co-Prix nobel de la paix 2007) affirme que ce gaz est très certainement responsable de l'augmentation de température et des dérèglements climatiques que subit actuellement notre planète. Les conséquences peuvent être catastrophiques : montée du niveau des océans et diminution des surfaces émergées, pénurie d'eau et d'alimentation dans certaines zones de la terre, phénomènes météorologiques violents... Le film "*Une vérité qui dérange*", Al Gore (2006, co-Prix nobel de la paix 2007)), est une illustration bien vulgarisée des conséquences actuelles et futures de ce phénomène. Pour remédier à ce problème, les solutions les plus évidentes sont la diminution de la consommation d'hydrocarbures et la variation des sources d'énergie. Une autre solution consiste à capturer puis à stocker le CO<sub>2</sub>. Par exemple, il est possible de le stocker dans des réservoirs géologiques profonds. Les sites de stockage sont variables et peuvent présenter des avantages annexes :

- Anciens réservoirs pétroliers, ce qui a l'avantage d'augmenter la quantité d'hydrocarbures exploitables. C'est le cas depuis 2000 à Weyburn (Canada), à Salah (Algérie) ou au Texas (Etats-Unis) ;
- Veine de charbons inexploitable, avec une récupération de méthane possible ;
- Aquifères salins profonds, dont la capacité de stockage est estimée équivalente au volume de CO<sub>2</sub> émis pendant plusieurs siècles.

Les sites de stockages de CO<sub>2</sub> sont utilisés depuis plusieurs années, et de nombreux sites sont en projet. En France, il est prévu d'injecter du gaz carbonique dans le site gazier épuisé de Lacq (Pyrénées-Atlantiques) et dans des aquifères du bassin parisien.

Le CO<sub>2</sub> doit être stocké sous forme supercritique et non gazeuse, pour limiter l'encombrement. La pression et la température critique pour le CO<sub>2</sub> sont de 7.4 MPa et 31 °C. Le stockage doit donc se faire dans des réservoirs profonds d'au moins 800m.

Le principe du stockage est relativement simple. Le CO<sub>2</sub> est capturé au niveau des sites de production, transporté puis comprimé à une pression supérieure à la pression interstitielle du milieu d'injection. Lors de son injection, il va donc partiellement chasser les fluides initialement présents dans les pores.

Dans le cas des aquifères salins, il est au mieux possible d'obtenir des saturations en CO<sub>2</sub> de 60 % à 70 %. La densité du CO<sub>2</sub> étant inférieure à celle de l'eau, celui-ci va remonter et s'accumuler sous les barrières peu perméables situées au-dessus. La géologie des sites d'injection est donc très particulière : il faut un réservoir poreux et perméable situé en dessous d'une barrière la plus imperméable possible.

Pour surveiller la localisation et les mouvements du CO<sub>2</sub> supercritique à ces profondeurs et à distance des puits, seules des techniques indirectes sont utilisables. Les ondes sismiques réfléchies ont l'avantage de pouvoir investiguer ces profondeurs et d'être influencées par des changements de composition du fluide. Dans le but d'inverser les ondes sismiques en concentration en CO<sub>2</sub>, il est nécessaire de comprendre quelle est l'influence du fluide sur les ondes sismiques. De plus, une inversion sera possible si les variations des propriétés du fluide liées à la concentration en CO<sub>2</sub> entraînent des changements non négligeables dans les propriétés des ondes sismiques. Pour cela, des modélisations numériques et des études de sensibilité par rapport à la concentration et à la localisation du CO<sub>2</sub> permettent de connaître les informations que peuvent fournir les ondes sismiques. Le code de propagation poro-élastique présenté dans le chapitre 2 a été adapté à l'étude de ce problème.

### Plan du chapitre

Dans une première partie, je présenterai les caractéristiques du fluide aux profondeurs concernées par le stockage de CO<sub>2</sub>. Il est ici indispensable de tenir compte de la pression et de la température.

Une deuxième partie sera consacrée à une étude de sensibilité numérique des ondes P réfléchies appliquée au cas du site de Sleipner, dans la mer du nord. Après une présentation de ce site, je m'intéresserai à l'influence de la géométrie de la répartition du gaz et de sa concentration. Je regarderai aussi les variations des vitesses et amplitudes des ondes sismiques lorsque le CO<sub>2</sub> dissout la matrice solide ou fait précipiter des carbonates.

## 3.2 Caractéristiques du fluide

Les propriétés des fluides entrant en jeu dans le stockage du CO<sub>2</sub> dépendent de la température et de la pression, elles mêmes étant fonctions de la profondeur  $z$ . Une solution simple consiste à considérer :

- un gradient géothermique constant  $G$  ( $G=20$  à  $35$  °C/km) ;
- une pression interstitielle égale à la pression hydrostatique, ce qui est le cas en l'absence de barrière imperméable.

La température  $T$  (en °C dans toute cette étude) et la pression  $P$  (Pa) sont alors définies à partir des valeurs en surface  $T_0$  et  $P_0$  par :

$$\begin{aligned} T(z) &= T_0 + G z \\ P(z) &= P_0 + \rho_f g z \end{aligned} \tag{3.1}$$

$g$  désigne l'accélération de la pesanteur.

### 3.2.1 Caractéristiques du CO<sub>2</sub>

Le CO<sub>2</sub> est introduit dans les réservoirs sous forme supercritique, c'est-à-dire que les conditions de pression et de température sont supérieures au point critique ( $P_c = 7.4$  MPa et  $T_c = 31$  °C). Les propriétés d'un fluide supercritique sont différentes de celles du gaz et du liquide, même si les propriétés du CO<sub>2</sub> varient continûment lors du changement d'état gaz/supercritique ou liquide/supercritique.

Le CO<sub>2</sub> supercritique dans les réservoirs peut être décrit par la loi des gaz réels de Van der Waals (1873) (voir par exemple Carcione et al., 2006 ) :

$$(P + a\rho_g^2) (1 - b\rho_g) = \rho_g R' (T + 273) \tag{3.2}$$

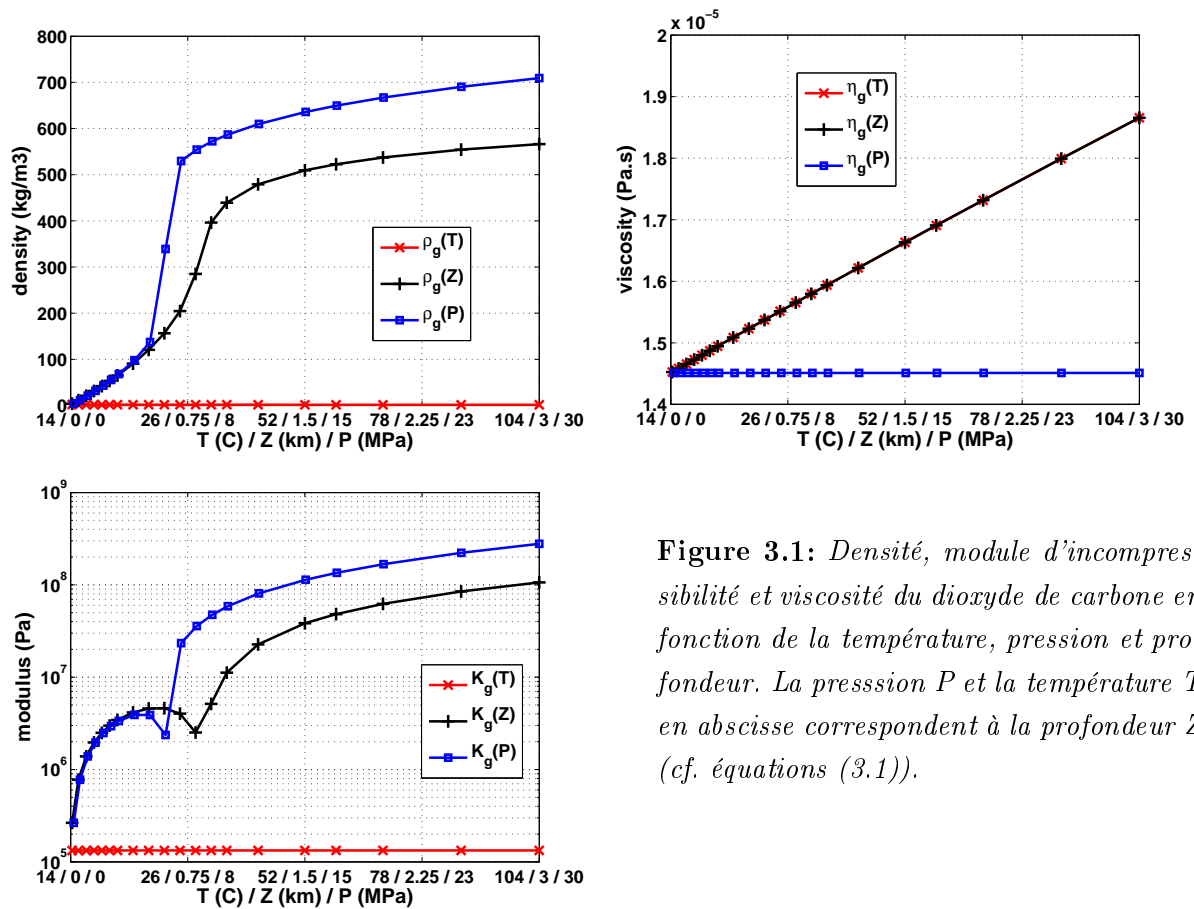
où  $a = 0.359 \text{ Pa} \cdot (\text{m}^3/\text{mol})^2 = 185.43 \text{ Pa} \cdot (\text{m}^3/\text{kg})^2$  et  $b = 42.7 \text{ cm}^3/\text{mol} = 0.970234 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$ . La masse molaire  $\mathcal{M}$  de CO<sub>2</sub> est de 44g/mol.  $R' = R/\mathcal{M}$  est la constante des gaz parfaits ( $R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot ^\circ\text{K})$ ) réduite par la masse molaire.

Cette équation permet de calculer la densité  $\rho_g$  du CO<sub>2</sub> en fonction de la température et

de la pression.

La compressibilité isothermale  $c_T$  est aussi calculable en utilisant cette équation par  $c_T = \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial P}$ . Pour des gaz polyatomiques, la compressibilité adiabatique est approximé par 3/4 de la compressibilité isothermale, ce qui permet de calculer le module d'incompressibilité du fluide (Carcione et al., 2006) :

$$K_g = \frac{4}{3 c_T} = 4 \frac{\rho_g R' (T + 273) - 2a \rho_g^2 (1 - b \rho_g)^2}{3 (1 - b \rho_g)^2} \quad (3.3)$$



**Figure 3.1:** Densité, module d'incompressibilité et viscosité du dioxyde de carbone en fonction de la température, pression et profondeur. La pression  $P$  et la température  $T$  en abscisse correspondent à la profondeur  $Z$  (cf. équations (3.1)).

Une des lois les plus simples pour décrire la viscosité du CO<sub>2</sub>  $\eta_g$  (Pa.s) est la formule de Sutherland. La viscosité est supposée constante par rapport à la pression :

$$\eta_g = 14.8 \cdot 10^{-6} \frac{533}{T + 513} \left( \frac{T + 273}{293} \right)^{1.5} \quad (3.4)$$

La densité et le module d'incompressibilité du CO<sub>2</sub> dépendent fortement de la pression. La figure 3.1 montre une variation forte de ces deux paramètres lorsqu'il passe de l'état gazeux à supercritique. Pour le gaz sous forme supercritique,  $\rho_g$  prend des valeurs proche



de celles du liquide et le module d'incompressibilité augmente pour atteindre quelques centaines de MPa. Le volume occupé par la même quantité de gaz est donc plus faible s'il est dans un état supercritique plutôt que gazeuse. Au contraire, la viscosité ne varie pas avec la pression et peu avec la température (environ 30%). Lors de la transition gaz/fluide supercritique, les variations de viscosité sont faibles.

On retrouve que la transition entre ces deux états a lieu autour de 800m de profondeur.

### 3.2.2 Caractéristiques de l'eau douce et salée

La densité de l'eau douce  $\rho_w$  ( $kg/m^3$ ) et de l'eau salée  $\rho_b$  ( $kg/m^3$ ) peut être calculée par les relations empiriques (Mavko et al., 1998) :

$$\begin{aligned}\rho_w &= 10^3 \left( 1 + 10^{-6} (-80 T - 3.3 T^2 + 0.00175 T^3 + 489 P - 2. T P + 0.016 T^2 P \right. \\ &\quad \left. - 1.3 \cdot 10^{-5} T^3 P - 0.333 P^2 - 0.002 T P^2) \right) \\ \rho_b &= \rho_w + 10^3 S \left( 0.668 + 0.44 S + 10^{-6} (300 P - 2400 P S \right. \\ &\quad \left. + T (80 + 3 T - 3300 S - 13 P + 47 P S)) \right)\end{aligned}\quad (3.5)$$

$S$  est la fraction massique en chlorure de sodium (ppm/1000000). Les vitesses acoustiques dans l'eau pure et salée sont :

$$\begin{aligned}V_w &= \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^3 w(i, j) T^i P^j \\ V_b &= V_w + S \left( 1170. - 9.6 T + 0.055 T^2 - 8.5 \cdot 10^{-5} T^3 + 2.6 P - 0.0029 T P \right. \\ &\quad \left. - 0.0476 P^2 + S^{1.5} (780 - 10 P + 0.16 P^2) \right) - 1820 S^2\end{aligned}\quad (3.6)$$

Les constantes  $w(i, j)$  ( $i = 0..4, j = 0..3$ ) sont données dans le tableau 3.1. La relation  $K_i = \rho_i V_i^2$ , ( $i = b, w$ ) et les équations (3.6) servent à estimer les modules d'incompressibilité de l'eau douce ( $K_w$ ) et salée ( $K_b$ ).

$i \setminus j$	0	1	2	3
0	1402.85	1.524	$3.437 \cdot 10^{-3}$	$-1.197 \cdot 10^{-5}$
1	4.871	-0.0111	$1.739 \cdot 10^{-4}$	$-1.628 \cdot 10^{-6}$
2	-0.04783	$2.747 \cdot 10^{-4}$	$-2.135 \cdot 10^{-6}$	$1.237 \cdot 10^{-8}$
3	$1.487 \cdot 10^{-7}$	$-6.503 \cdot 10^{-7}$	$-1.455 \cdot 10^{-8}$	$1.327 \cdot 10^{-10}$
4	$-2.197 \cdot 10^{-7}$	$7.987 \cdot 10^{-10}$	$5.230 \cdot 10^{-11}$	$-4.614 \cdot 10^{-13}$

**Table 3.1:** Valeur des constantes  $w(i, j)$  ( $i = 0..4, j = 0..3$ ) pour le calcul de la vitesse acoustique dans l'eau en fonction de la température et de la pression (eq. (3.6))

La viscosité  $\eta_b$  (Pa.s) de l'eau salé peut être approximé par (Batzle et Wang, 1992) :

$$\eta_b = 10^{-3} \left( 0.1 + 0.333S + (1.65 + 91.9S^3) e^{-[0.42 (S^{0.8} - 0.17)^2 + 0.045]} T^{0.8} \right) \quad (3.7)$$

### 3.2.3 Caractéristiques de l'eau salée contenant du CO<sub>2</sub> dissous

Une partie du CO<sub>2</sub> gazeux va se dissoudre dans l'eau salée, changeant donc ses propriétés. Il est nécessaire de recalculer ces caractéristiques et de connaître la quantité de CO<sub>2</sub> restant libre après l'injection. Le volume du gaz injecté  $v_g$  est égal au volume du CO<sub>2</sub> dissous  $v_{g1}$  plus le volume de CO<sub>2</sub> libre  $v_{g2}$ .

On définit le rapport  $R_g$  comme le volume de gaz dissous sur le volume de liquide. Il est ensuite nécessaire de corriger ce paramètre du rapport de densité en surface ( $\rho_i(0)$ ,  $i = g, b$ ) et en profondeur ( $\rho_i$ ,  $i = g, b$ ) (Carcione et al., 2006) :

$$\begin{aligned} \log(R_g) &= \log(0.712 P (|T - 76.71|^{1.5} + 3676. P^{0.64})) \\ &\quad - 4 - 7.786 S (T + 17.78)^{-0.306} \\ R'_g &= \frac{\rho_g(0)}{\rho_g} \frac{\rho_b}{\rho_b(0)} R_g = \frac{v_{g1}}{v_l} \end{aligned} \quad (3.8)$$

On peut alors définir le taux volumique de CO<sub>2</sub> comme le rapport du volume de CO<sub>2</sub> non dissous sur le volume total. Avant absorption, lorsque tout le gaz injecté est libre, les taux volumiques sont :

$$\begin{aligned} \text{avant absorption : } S_{g0} &= \frac{v_g}{v_l + v_g}, \\ \text{critique : } S_{gc} &= \frac{R'_g}{1 + R'_g} \end{aligned} \quad (3.9)$$

La saturation critique  $S_{gc}$  est associée au volume maximum de gaz pouvant être dissous dans la phase fluide.

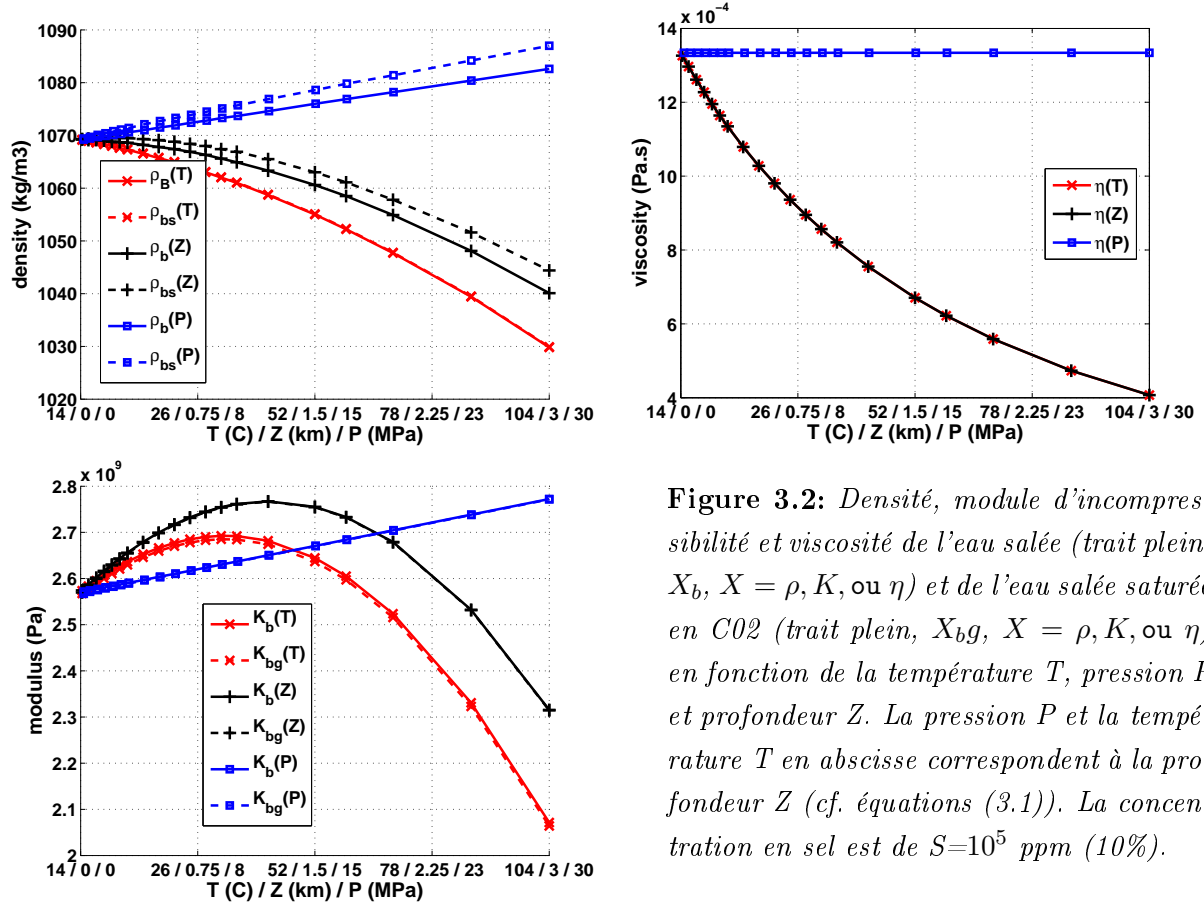
Si  $S_{g0}$  est supérieur à  $S_{gc}$ , le liquide sera saturé en CO<sub>2</sub> et il restera du CO<sub>2</sub> libre. Dans ce cas, la nouvelle fraction volumétrique en CO<sub>2</sub> et les nouvelles caractéristiques du fluide  $\rho_{bs}$  et  $K_{bs}$  seront (Batzle et Wang, 1992) :

$$\begin{aligned} S_g &= \frac{v_{g2}}{v_g + v_l} = \frac{S_{g0} - S_{gc}}{1 - S_{gc}} \\ \rho_{bs} &= \rho_b + R'_g \rho_g \\ K_{bs} &= \frac{K_b}{1 + 0.0494 R'_g} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Carcione et al. (2006) considère que la présence de CO<sub>2</sub> dissous n'a pas d'influence sur le module d'incompressibilité de l'eau. On suppose la viscosité de l'eau indépendante du gaz dissous.

Si  $S_{g0}$  est inférieur à  $S_{gc}$ , tout le gaz est absorbé par l'eau. Après absorption, on a  $v_g = v_{g1}$  et  $v_{g2} = 0$ . Les nouvelles caractéristiques du fluide sont alors obtenues grâce aux relations (3.10) en substituant  $R'_g$  par  $(S_g/S_{gc}) R'_g$ .

En pratique, l'eau salée absorbe peu de CO<sub>2</sub>. Dans l'étude de stockage géologique, l'eau salée pourra toujours être considérée comme saturée en CO<sub>2</sub>. Bachu et Adams (2003) trouvent des rapports massiques de solubilité (masse de CO<sub>2</sub> dissous sur masse d'eau salée) inférieur à 10%.



**Figure 3.2:** Densité, module d'incompressibilité et viscosité de l'eau salée (trait plein,  $X_b$ ,  $X = \rho, K$ , ou  $\eta$ ) et de l'eau salée saturée en CO<sub>2</sub> (trait plein,  $X_{bg}$ ,  $X = \rho, K$ , ou  $\eta$ ) en fonction de la température  $T$ , pression  $P$  et profondeur  $Z$ . La pression  $P$  et la température  $T$  en abscisse correspondent à la profondeur  $Z$  (cf. équations (3.1)). La concentration en sel est de  $S=10^5$  ppm (10%).

La figure 3.2 présente les variations de la densité, du module d'incompressibilité et de la viscosité de l'eau salée et de l'eau salée saturée en CO<sub>2</sub> dissous en fonction de la température, pression et profondeur. La pression et la température ont des effets inverses sur la densité, avec une influence dominante de la température. La température a la même influence sur l'eau salée qu'elle soit en présence ou non de gaz.

Le comportement du module d'incompressibilité de l'eau salée est plus complexe : il augmente d'abord avec la température puis diminue. Il augmente légèrement avec la pression. Le CO<sub>2</sub> dissous n'a pratiquement pas d'influence sur ce paramètre.

La présence de CO<sub>2</sub> dissous fait très peu varier les propriétés de l'eau salée. La température influe beaucoup plus que la pression sur les propriétés de ce fluide.

### 3.2.4 Caractéristiques du mélange biphasique eau salée et CO<sub>2</sub>

Lors du stockage de CO<sub>2</sub>, l'eau salée est rapidement saturée en gaz et le fluide est un mélange biphasique d'eau salée et de CO<sub>2</sub>. Il faut donc déterminer les caractéristiques du fluide équivalent à introduire dans les équations de Biot (1956). Pour la densité  $\rho_f$ , je considère la moyenne évoquée dans l'équation (1.9).

$$\rho_f = S_g \rho_g + (1 - S_g) \rho_{bs} \quad (3.11)$$

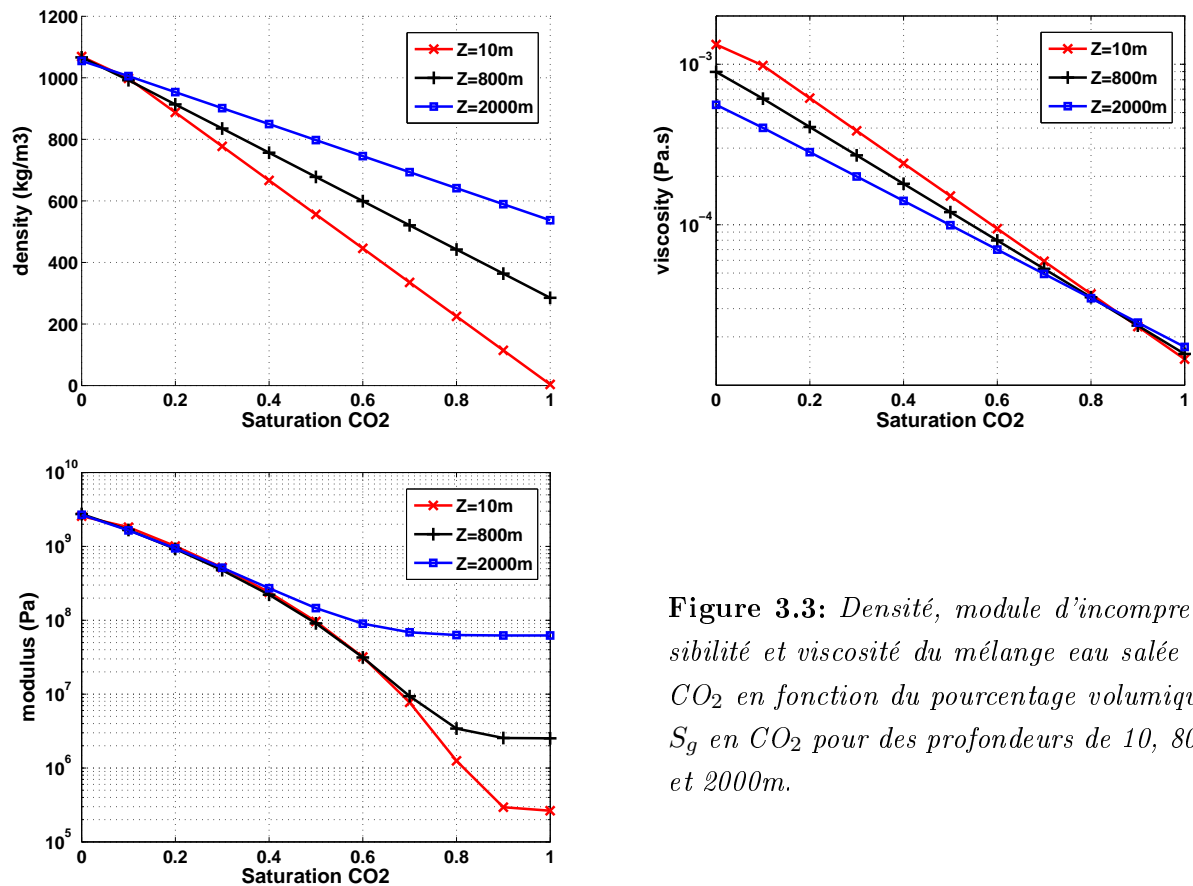
Carcione et al. (2006) calcule la viscosité  $\eta_f$  du mélange

$$\eta_f = \eta_g \left( \frac{\eta_b}{\eta_g} \right)^{(1-S_g)} \quad (3.12)$$

Enfin, le module d'incompressibilité équivalent peut être obtenu par une moyenne harmonique ou par une loi de Brie et al. (1995) (cf. eq. (1.10)) :

$$K_f = \left( \frac{S_g}{K_g} + \frac{1 - S_g}{K_{bs}} \right)^{-1}$$

$$K_f = (K_{bs} - K_g) (1 - S_g)^e + K_g \quad (3.13)$$



**Figure 3.3:** Densité, module d'incompressibilité et viscosité du mélange eau salée + CO<sub>2</sub> en fonction du pourcentage volumique  $S_g$  en CO<sub>2</sub> pour des profondeurs de 10, 800 et 2000m.

Il serait plus correct de considérer une théorie de saturation imparfaite (White, 1975; Pride, 2005). Cependant, Carcione et al. (2006) montre que l'utilisation de la loi de Brie

et al. (1995) avec une valeur de l'exposant  $e$  égale à 5 donne des vitesses sensiblement identiques à celle obtenue avec la théorie de White (1975) dans le cas du mélange eau salée et CO<sub>2</sub>. L'atténuation reste cependant surestimée dans le cas de la loi de Biot (1956) par rapport aux théories de saturation imparfaite. Par facilité, je travaillerai avec la théorie de Biot (1956) présentée dans les chapitres 1 et 2, avec un module d'incompressibilité fluide estimée par la loi de Brie et al. (1995).

La figure 3.3 présente les variations de densité, module d'incompressibilité (loi de Brie et al. (1995)) et viscosité du mélange CO<sub>2</sub> et eau salée en fonction du pourcentage volumique en CO<sub>2</sub> introduit  $S_{g0}$ , pour des pressions et températures correspondant à des profondeurs de 10, 800 et 2000m.  $\rho_f$  et  $\eta_f$  varient linéairement entre les propriétés de l'eau salée et du gaz. Lorsque la quantité de gaz augmente,  $K_f$  décroît pour atteindre un palier correspondant aux valeurs pour le gaz. Il n'y aura donc pas de fortes variations de vitesses pour des concentrations élevées en CO<sub>2</sub>.

### 3.3 Cas du stockage de Sleipner

#### 3.3.1 Présentation du site

Depuis octobre 1996, la compagnie pétrolière Statoil et ses partenaires ont pour la première fois tenté de stocker du CO<sub>2</sub> à grande échelle dans un aquifère salin (Sable Utsira) du centre de la mer du Nord à Sleipner. Ce site était déjà équipé de plateformes d'extraction de pétrole dans une formation plus profonde. Pendant 20 ans, environ 1 million de tonnes de gaz sont annuellement injectées. Comme ce site de stockage est le premier, il a été largement étudié et a fait l'objet de nombreuses publications (Arts et al., 2004; Carcione et al., 2006; Bickle et al., 2007). En particulier le projet de recherche SACS (Saline Aquifer CO<sub>2</sub> Storage), impliquant des entreprises pétrolières, la commission européenne et des organismes nationaux de recherche (IFP, BRGM) a pour but de surveiller et de prédire le comportement du CO<sub>2</sub>.

#### Géologie et caractéristiques du milieu poreux

Le gaz est introduit à la base de la formation Utsira, à environ 1000 m de profondeur. Cette formation, datée de la fin du Miocène et du début du Pliocène (11 à 3 millions d'années), est une couche de sable très perméable et non consolidé. Le toit de cette formation est situé entre 750 et 900 mètres, tandis que la base varie de 900 à 1100 mètres de profondeur. Elle est traversée par plusieurs fines couches de sédiments argileux ("*shale*") ayant une perméabilité beaucoup plus faible. Ces couches argileuses, notées de M1 à M5 (de haut en bas) font environ 1 m d'épaisseur, exceptée celle située près du sommet (M1) dont l'épaisseur est d'environ 6 mètres. Le sable Utsira est principalement siliceux (environ 70%), avec environ 10 % de feldspath et autant de coquilles calcaires (Zweigel et al.,

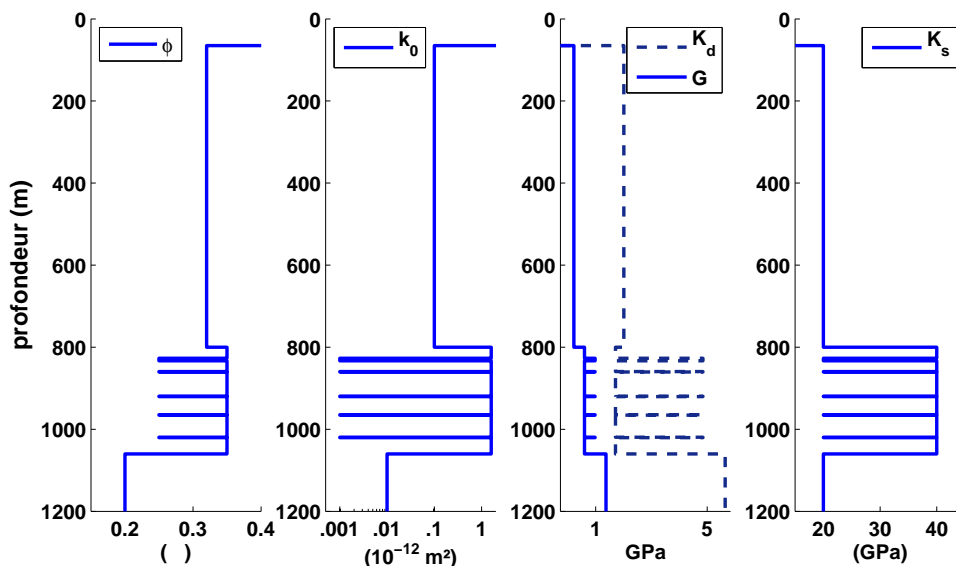
2004). Les interactions chimiques entre le dioxyde de carbone et les minéraux sont donc pratiquement inexistantes. Cette formation est entourée d'argile. La base est constituée par des argiles Hordaland et le toit par plusieurs centaines de mètres de sédiments argileux daté du Pliocène et du Quaternaire (Argile Nordland). En outre, la géométrie de ces ensembles est approximativement horizontale, au moins localement. L'hypothèse d'un milieu tabulaire est donc vérifiée pour modéliser la réponse sismique.

### Caractéristiques du milieu poreux

Les paramètres nécessaires à la modélisation ont été obtenus de plusieurs manières :

- La porosité du sable Utsira, estimée par des méthodes in situ et en laboratoire atteint des valeurs élevées allant de 35 % à 43 %. Ces valeurs confirment que le sable est normalement consolidé. Pour se placer dans le cas le plus défavorable, je considère ici une porosité de 35 %.
- La perméabilité, mesurée sur échantillons, est comprise entre 1.5 et 3 Darcy. Les argiles ont des perméabilités comprises entre 1 et 100 milli Darcy.
- Les paramètres mécaniques des minéraux considérés (cf. table 3.2) sont des valeurs typiques pour la silice et pour des matériaux argileux.  $G$  et  $K_U$  ont été obtenues à partir des vitesses sismiques.

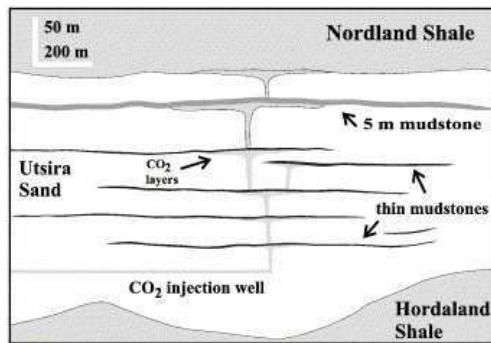
Les paramètres et la géométrie du milieu 1D présenté dans la figure 3.4 et le tableau 3.2 ont été inspirés par le modèle 2D utilisé par Carcione et al. (2006).



**Figure 3.4:** Paramètres poro-élastiques ( $\phi$ ;  $k_0$ ;  $K_D$  et  $G$ ;  $K_S$ ) utilisés pour la modélisation du stockage de CO<sub>2</sub> de Sleipner, d'après Carcione et al. (2006).

Formation	$\phi$	$k_0$ ( $10^{-12}m^2$ )	$\rho_s$ ( $kg/m^3$ )	$K_s$ ( $GPa$ )	$K_D$ ( $GPa$ )	$G$ ( $GPa$ )
Argile Nordland	0.320	0.1	2600	20	1.5	0.73
Sable Utsira	0.350	1.6	2600	40	1.33	0.85
Argile Utsira	0.25	0.001	2600	20	4.70	0.99
Argile Hordaland	0.2	0.01	2600	20	6.49	1.16

**Table 3.2:** Propriétés du milieu poreux caractérisant le site de stockage de CO<sub>2</sub> de Sleipner, d'après Carcione et al. (2006). L'argile Utsira se rapporte aux couches d'argile intercalées dans la formation Utsira

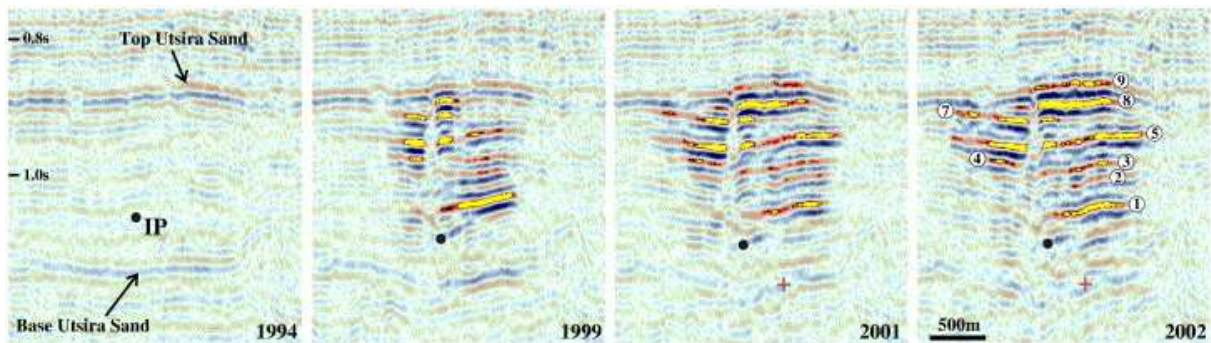


**Figure 3.5:** Illustration schématique de l'injection de CO<sub>2</sub> de son élévation gravitaire et de sa concentration sous les couches d'argile (d'après Bickle et al. (2007))

### Comportement du CO<sub>2</sub>

Connaissant l'extension du site et la porosité moyenne, le volume potentiel de stockage vaut 1.35 km<sup>3</sup> (Zweigel et al., 2004), même si en pratique seulement la moitié de ce volume à une chance d'être utilisée.

Le CO<sub>2</sub> est injecté en bas de la formation Utsira (cf. fig. 3.5), puis s'élève par gravité. Il est ensuite partiellement coincé par les couches d'argile avant d'atteindre la couche M1 d'argile plus épaisse et le sommet de la formation. L'argile Nordland bloque alors la remontée du gaz. Cette structure en couche a été modélisée par Arts et al. (2004). Ils montrent une absence de fuite de gaz huit ans après le début de l'injection.



**Figure 3.6:** Profils de sismique réflexion avant injection (1994) et après injection (1999, 2001 et 2002) (d'après Arts et al., 2004). Le point marqué IP désigne le point d'injection du CO<sub>2</sub>.

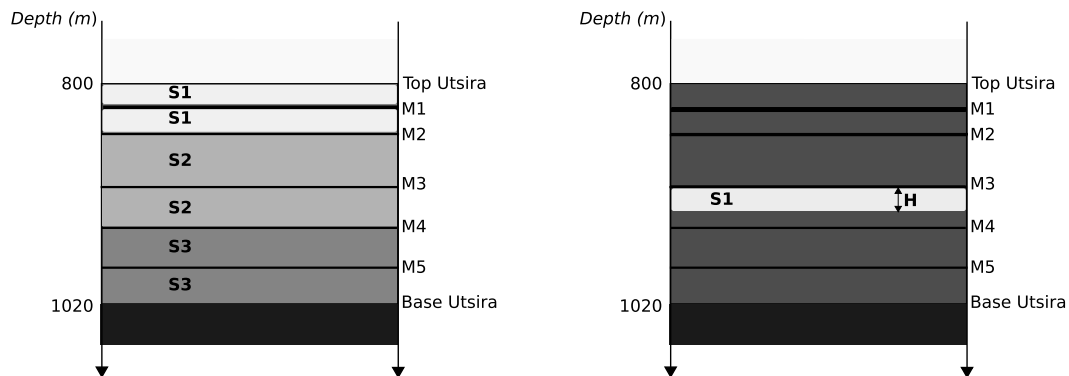
### Données sismiques

Le profil avant injection montre la base et le sommet du réservoir mais peu d'informations sur l'intérieur de celui-ci (cf. fig. 3.6). Les profils après injection montre des réflexions énergétiques ("*bright spots*") dans le réservoir correspondant au CO<sub>2</sub> bloqué par les couches d'argile. A gauche du point d'injection, la cheminée principale permettant la remontée du gaz se dessine par une absence de réflexion (Arts et al., 2004).

### 3.3.2 Modélisation des ondes sismiques réfléchies par la formation Utsira

Il est possible de considérer deux répartitions du CO<sub>2</sub> dans la formation :

- Carcione et al. (2006) considèrent que les couches de sable entre les bancs d'argile ont une concentration homogène en CO<sub>2</sub> (fig. 3.7, gauche) ;
- En réalité, le CO<sub>2</sub> se concentre sous les zones peu perméables que sont les couches d'argile (fig. 3.5). En une dimension, cette géométrie est modélisée par la figure 3.7 (droite).



**Figure 3.7:** Deux modélisations possibles de la géométrie du CO<sub>2</sub> : A gauche, le CO<sub>2</sub> est répartie de manière homogène à l'intérieur de chaque couche. Le taux  $S_{g0}$  de CO<sub>2</sub> prend les valeurs  $S1$ ,  $S2$  et  $S3$  selon les couches. A droite, le CO<sub>2</sub> se concentre sous les interfaces. Dans cette étude, je considère un taux  $S1$  de gaz sous l'interface argileuse  $M3$  sur une épaisseur  $H$ .

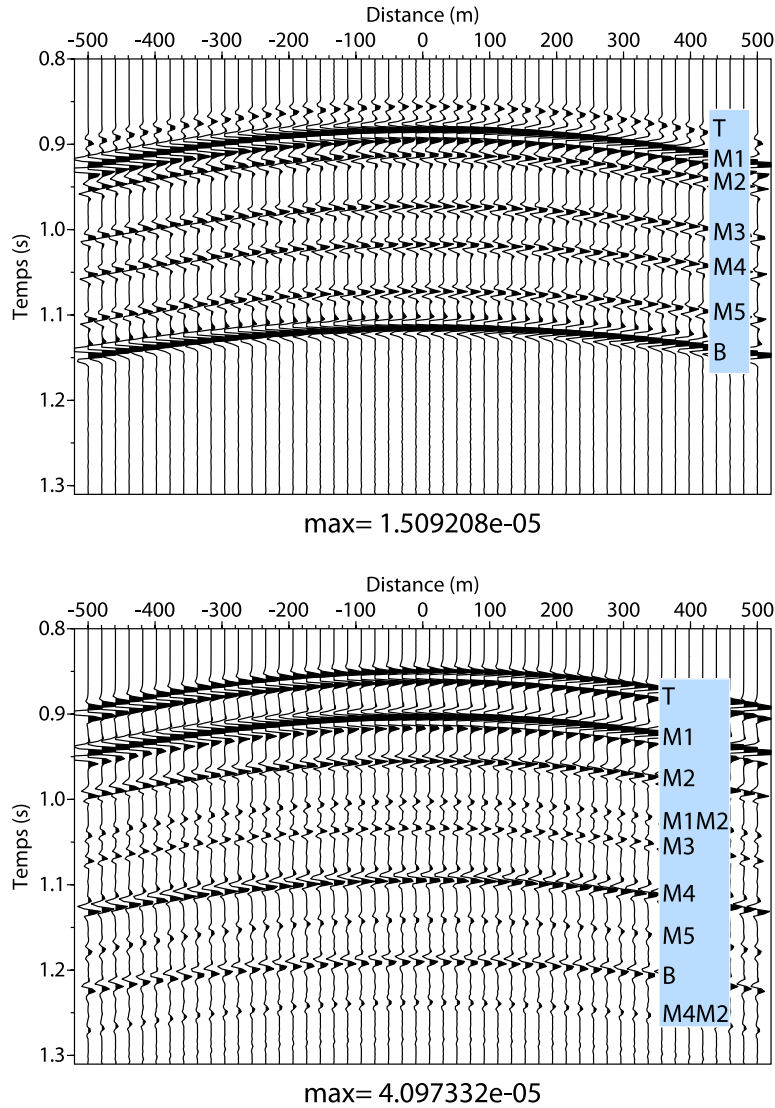
La modélisation numérique de la réponse sismique réfléchi par la formation Utsira avant injection de CO<sub>2</sub> (figure 3.8, haut) montre des ondes réfléchies venant du toit et de la base de la formation Utsira ainsi que de toutes les couches d'argile. Les réflexions les plus énergétiques viennent de la base et de la couche d'argile M1 de 6 mètres d'épaisseur.

A la fin de l'injection, le CO<sub>2</sub> aura migré vers le haut de la formation. Pour modéliser les ondes réfléchies, je considère que les deux couches supérieures de sable (fig. 3.7, gauche) auront une concentration en CO<sub>2</sub> forte ( $S1=60\%$ ) et les deux couches en dessous une



concentration en CO<sub>2</sub> résiduelle beaucoup plus faible ( $S_2=20\%$ ).

Le sismogramme de la figure 3.8, bas, calculé avec ces concentrations de CO<sub>2</sub>, montre des réflexions beaucoup plus énergétiques, en particulier au niveau du toit (T), de M2 et M4. Des multiples sont mêmes visibles, notamment entre M1 et M2 et M2 et M4. Les vitesses des ondes étant ralenties par la présence de CO<sub>2</sub>, les réflexions sur les interfaces les plus profondes sont fortement décalées.



**Figure 3.8:** Sismogrammes synthétiques calculés avec le modèle de Sleipner (fig. 3.4) avec : haut) modèle avant injection ; bas) des concentrations de CO<sub>2</sub> de  $S_1=60\%$  (entre T et M2) et  $S_2=20\%$  (entre M2 et M4) (fig. 3.7, gauche). T,  $M_i$  et B désigne respectivement le toit, les 5 couches d'argile et la base de la formation Utsira et les ondes réfléchies qui leur sont associées. M1M2 (M4M2) sont les réflexions multiples entre les couches M1 et M2 (M4 et M2)

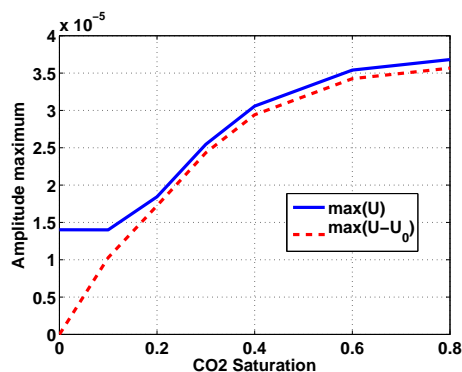
### 3.3.3 Sensibilité à la concentration en CO<sub>2</sub>

J'ai regardé l'influence de la concentration en CO<sub>2</sub> sur la vitesse, l'atténuation, l'amplitude et la forme des ondes sismiques. Pour cela, j'ai considéré les concentrations  $S1$  et  $S3$  nulles (fig. 3.7, gauche), et j'ai fait varier  $S2$ .

#### Variation d'amplitude des ondes réfléchies

La figure 3.9 présente les variations du maximum d'amplitude du sismogramme complet en fonction de la concentration en CO<sub>2</sub>. Plus le contraste en fluide est fort, plus les réflexions sont énergétiques. Ce phénomène, appelé "*bright spot*", se retrouve sur les données sismiques (Arts et al., 2004). Le contraste d'impédance sismique augmente avec la concentration en CO<sub>2</sub>, ce qui augmente donc l'amplitude des réfléchies.

En dessous d'une concentration de 0.1, l'amplitude maximale du sismogramme reste celle liée à  $M1$ , et n'apporte pas d'information sur la saturation en CO<sub>2</sub>. On peut aussi s'intéresser à la différence entre le sismogramme calculé sans CO<sub>2</sub> (avant injection  $U_0$ ) et avec CO<sub>2</sub> ( $U$ ). Dans ce cas, l'amplitude maximale est reliée à la saturation et apparaît comme un facteur intéressant pour quantifier le taux de CO<sub>2</sub> présent dans le sous-sol.



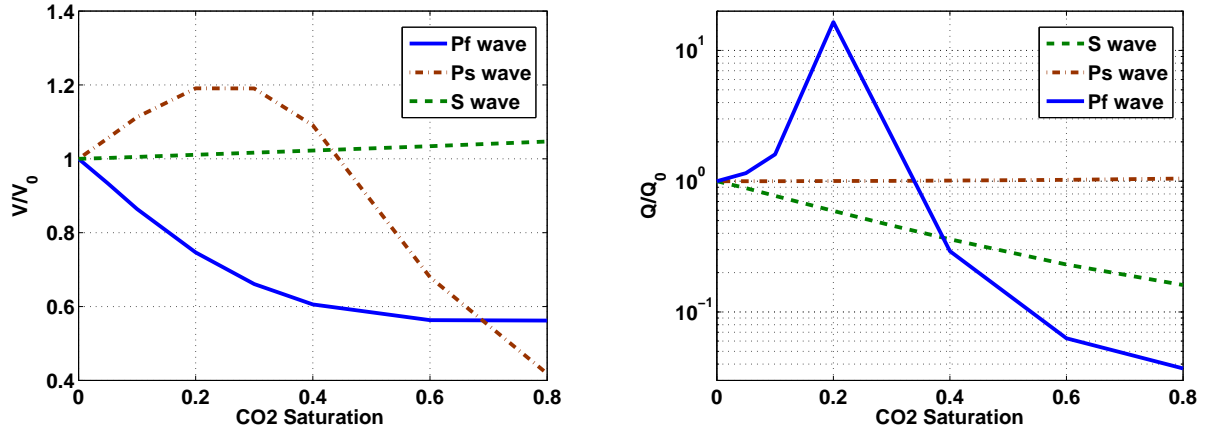
**Figure 3.9:** Maximum d'amplitude du champ d'ondes complets réfléchies par la formation Utsira  $U$  et maximum d'amplitude de la différence entre les sismogrammes calculés sans CO<sub>2</sub>  $U_0$  et avec CO<sub>2</sub>  $U$  en fonction du pourcentage volumique de CO<sub>2</sub>  $S2$  (cf. fig. 3.7, gauche).

#### Variation de vitesse des ondes

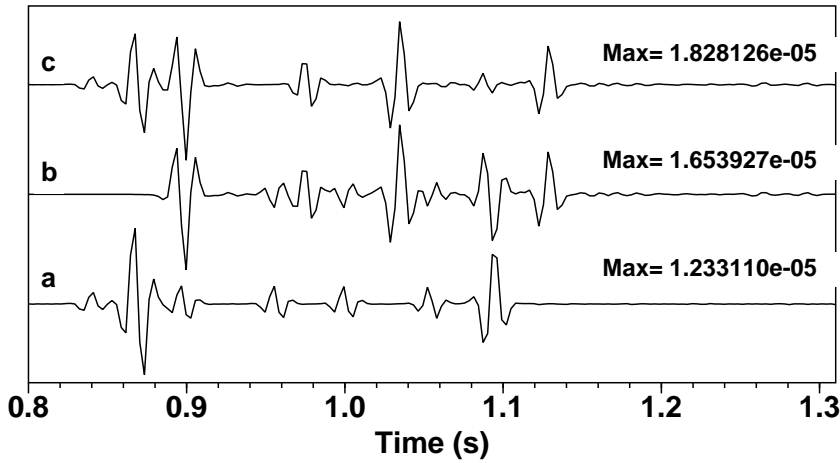
La vitesse est elle aussi un bon indicateur de la saturation en CO<sub>2</sub> (cf. fig. 3.10).

La présence de la couche fluide (mer) en surface empêche l'utilisation des ondes S. Les ondes S ne sont cependant que très peu sensibles au fluide : une augmentation du taux de gaz va se traduire par une diminution de la densité du milieu, ce qui va faire croître très faiblement leurs vitesses. Les ondes Ps ont un comportement complexe, leur vitesse croît puis décroît lorsque la saturation en CO<sub>2</sub> augmente. Leur amplitude de ces ondes est cependant trop faible pour qu'elles soient utilisables. La vitesse des ondes Pf décroît avec l'augmentation du taux de CO<sub>2</sub>, en suivant une loi similaire à celle suivie par le module d'incompressibilité fluide (cf. fig. 1.3).

L'atténuation des ondes Ps est peu dépendante des variations de fluide, celle des ondes S



**Figure 3.10:** Variation de la vitesse  $V$  (gauche) et du facteur de qualité  $Q$  (droite) en fonction du pourcentage volumique de CO<sub>2</sub>  $S_2$ , (cf. fig. 3.7) pour les ondes  $P$  rapide (Pf),  $P$  lente (Ps) et  $S$ . Ils sont normalisés par les valeurs sans CO<sub>2</sub> ( $V_0$  et  $Q_0$ ).



**Figure 3.11:** Traces sismiques à offset nul calculées pour le modèle de Sleipner (fig. 3.7) sans CO<sub>2</sub> (a) et avec une saturation de  $S_2=0.4$  (c). La trace (b) est la différence de (a) et (c).

croît lorsque le taux de CO<sub>2</sub> augmente. Enfin, le facteur de qualité de l'onde Pf présente un pic autour d'un taux de 0.2 et est plus faible pour des taux plus élevés de CO<sub>2</sub>.

Hormis l'augmentation de l'amplitude et le retard temporel déjà évoqués, les ondes Pf réfléchies montrent des changements de forme (cf. fig. 3.11). En particulier, la réflexion sur le sommet de la couche contenant du CO<sub>2</sub> (M2) est déphasée.

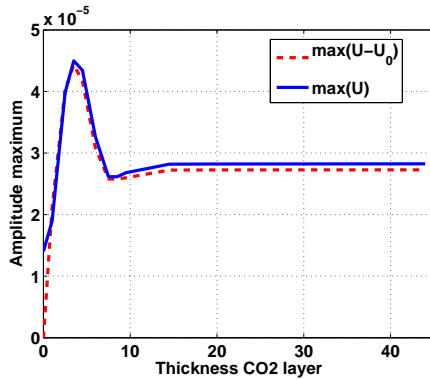
### 3.3.4 Sensibilité à la répartition du CO<sub>2</sub>

La répartition du CO<sub>2</sub> injecté n'est pas connue. Pour comprendre son influence, j'ai fait varier l'épaisseur  $H$  (cf. fig. 3.7, droite) de la couche saturée en CO<sub>2</sub> pour une saturation en CO<sub>2</sub> constante (cas n° 1) ou un volume de CO<sub>2</sub> constant (cas n° 2). L'intérêt est double : il s'agit d'évaluer la sensibilité des ondes sismiques à la géométrie de la répartition du gaz, et de connaître l'erreur faite en considérant dans les modélisations une concentration

homogène de gaz au sein d'une couche.

### Cas n° 1 : Saturation en CO<sub>2</sub> constante

Le CO<sub>2</sub> s'épanche sous les barrières imperméables, la hauteur de la couche de CO<sub>2</sub> diminue avec la distance horizontale au puit d'injection. J'ai fait varier la hauteur  $H$  (cf. fig. 3.7, droite) de la couche de CO<sub>2</sub>, en gardant la concentration  $S_1$  constante, pour regarder l'évolution de l'amplitude des ondes réfléchies lorsqu'on s'éloigne du puit d'injection. La couche contenant du CO<sub>2</sub> produit deux ondes réfléchies, associées à la base et au sommet de la couche. Pour une épaisseur supérieure à 30 mètres, soit la longueur d'onde dominante,



**Figure 3.12:** *Maximum d'amplitude des ondes réfléchies par la formation Utsira et maximum d'amplitude de la différence entre les ondes réfléchies sans CO<sub>2</sub> et avec CO<sub>2</sub> en fonction de l'épaisseur  $H$  (mètres) de la couche contenant du CO<sub>2</sub> (cf. fig. 3.7, droite). La saturation  $S_1$  en CO<sub>2</sub> est gardée constante et égale à 40%.*

les deux ondes réfléchies sont distinctes. Pour une épaisseur comprise entre 15 mètres et 30 mètres, ces deux ondes interfèrent sans changement du maximum d'amplitude (cf. fig 3.12). Ces deux ondes interfèrent entre elles de manière constructive pour des couches de gaz d'épaisseur comprise entre 2 et 7 mètres avec un maximum d'amplitude à 4 mètres.

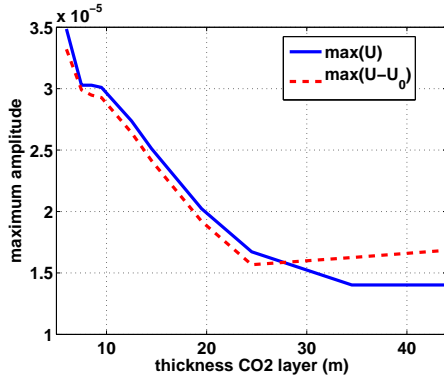
### Cas n° 2 : Volume de CO<sub>2</sub> constant

Le volume de CO<sub>2</sub> injecté est connu, par contre sa répartition ne l'est pas. Il est intéressant de connaître les différences sur les données sismiques produites par des différences de répartition. De plus cet aspect permet de tester l'hypothèse utilisée dans les modélisations d'un remplissage homogène (Carcione et al., 2006).

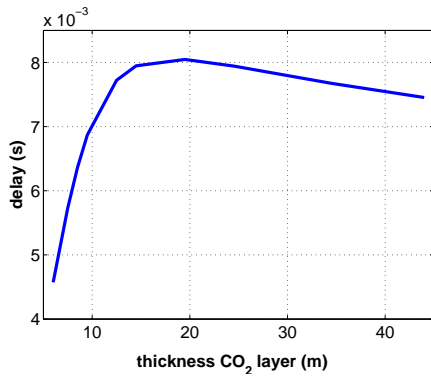
Lorsque la saturation en gaz diminue, les contrastes de vitesses sont moins forts. L'amplitude des ondes réfléchies (fig. 3.13) diminue continûment lorsque l'épaisseur de la couche contenant le CO<sub>2</sub> augmente.

De plus, le retard des ondes réfléchies par les interfaces existants sous la couche de gaz n'est pas constant (fig. 3.14). Il est maximum pour une épaisseur de 20 m (soit un taux de CO<sub>2</sub> de 24%), et est plus faible pour des épaisseurs supérieures ou inférieures.

Considérer une répartition homogène ou une répartition par couches discontinues pour effectuer une modélisation des ondes sismiques n'est pas du tout équivalent : les vitesses,



**Figure 3.13:** *Maximum d'amplitude des ondes réfléchies par la formation Utsira et maximum d'amplitude de la différence entre les ondes réfléchies sans CO<sub>2</sub> et avec CO<sub>2</sub> en fonction de l'épaisseur  $H$  (mètres) de la couche contenant du CO<sub>2</sub> (cf. fig. 3.7, droite). Le volume de CO<sub>2</sub> est gardé constant et égal à  $1.68\text{m}^3$  dans une colonne de hauteur  $H$  et de surface à la base  $1\text{m}^2$ .*

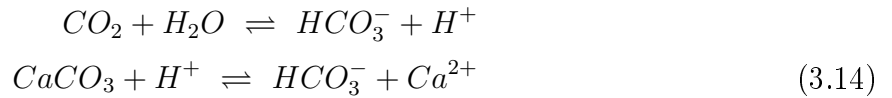


**Figure 3.14:** *Décalage temporel des ondes réfléchies par les interfaces sous la couche contenant du CO<sub>2</sub> en fonction de l'épaisseur  $H$  (mètres) de cette couche (cf. fig. 3.7, droite). Le volume de CO<sub>2</sub> est gardé constant et égal à  $1.68\text{ m}^3$  dans une colonne de hauteur  $H$  et de surface à la base  $1\text{m}^2$ .*

les formes et amplitudes changent fortement. Pour inverser les ondes sismiques en taux de CO<sub>2</sub>, il faut soit connaître *a priori* la géométrie du gaz soit l'inverser simultanément.

### 3.3.5 Influence de la dissolution et précipitation des carbonates

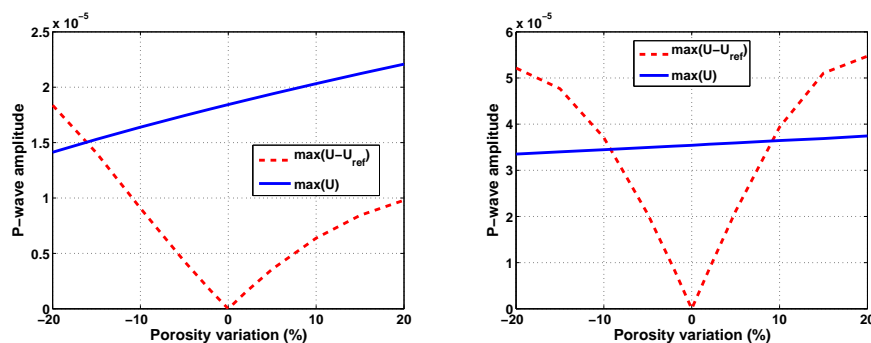
Le dioxyde de carbone rend acide l'eau dans lequel il se dissout. Au niveau de l'injection, le gaz va réagir avec les carbonates et dissoudre ces derniers. Les ions dissous vont ensuite précipiter à distance du point d'injection lorsque la pression diminue. Les réactions chimiques de dissolution du CO<sub>2</sub> dans l'eau et de dissolution-précipitation du carbonate de calcium s'écrivent :



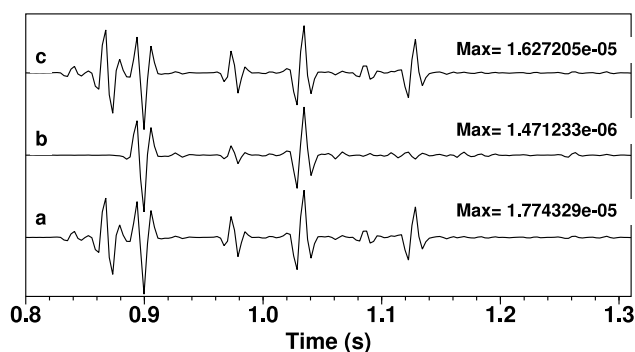
Le Guen et al. (2007) ont montré par une circulation contrôlée d'eau chargée en CO<sub>2</sub> à haute pression dans des échantillons de calcaires et grès calcaires des variations de porosité allant jusqu'à 25 %. Ces variations de porosité sont associées à des variations du module d'incompressibilité drainé  $K_D$  du matériau. La dissolution à proximité du puit d'injection va fragiliser le squelette solide ( $K_D$  diminue), tandis que la précipitation va

faire augmenter  $K_D$ .

Il est intéressant de savoir si ces variations de paramètres mécaniques entraînent des changements sur les ondes réfléchies pouvant masquer l'information sur le fluide. Le sable Utsira est majoritairement composé de silice, et ne réagit donc pas avec le gaz. Cependant, pour pouvoir comparer l'influence de la concentration en CO<sub>2</sub> et celle de la porosité et du module d'incompressibilité drainé, j'ai choisi de faire varier ces deux derniers paramètres dans le modèle de Sleipner utilisé dès le début de ce chapitre. J'ai considéré plusieurs concentrations S2 de CO<sub>2</sub> entre les couches M2 et M4 (cf. fig. 3.7, gauche).



**Figure 3.15:** Maximum d'amplitude des ondes  $P$  réfléchies par la formation Utsira en fonction du changement de porosité dans le milieu (trait plein). L'onde réfléchie ayant la plus grande amplitude est celle générée par M2. En pointillés, maximum d'amplitude de la différence entre les sismogrammes sans ( $U_{ref}$ ) et avec ( $U$ ) variation de porosité. Le taux S2 de CO<sub>2</sub> introduit est de 20% à gauche et 60% à droite.



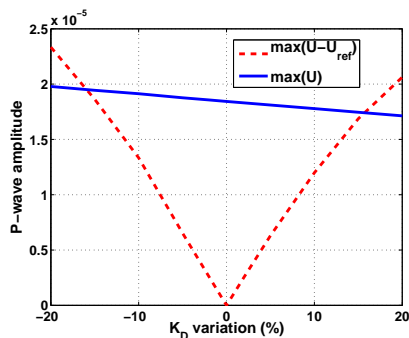
**Figure 3.16:** Comparaison de traces sismiques à offset nul pour a) une saturation en gaz S2 de 19.3% et une porosité dans les mêmes couches (entre M2 et M4) de 35 %, c) une saturation en gaz S2 de 20% et une porosité de 31.5 %, b) différence entre a) et c). La vitesse des ondes  $P$  est identique dans tous les cas.

### Variation de porosité

Lorsque la porosité augmente, l'amplitude des ondes réfléchies croît. Plus le milieu

contient de CO<sub>2</sub>, moins les variations de porosité ont d'influence sur l'amplitude des réfléchies (cf. fig. 3.15). La vitesse des ondes est peu influencée par les variations de porosité : pour un taux de CO<sub>2</sub> de 0.2, la variation de vitesse associée à plus ou moins 20 % de variation de porosité est respectivement de -0.8 % et 2.5 %.

La figure 3.16 représente les traces sismiques obtenues en perturbant la porosité de 10% dans les couches entre M2 et M4 et en perturbant la saturation en CO<sub>2</sub>  $S_2$  de 3.5%. Dans les deux cas la vitesse des ondes P est identique. Les ondes sismiques présentent des formes semblables, avec une très légère différence d'amplitude. Dans ce cas, il est pratiquement impossible de différencier quel est le paramètre qui a varié. L'aspect positif est qu'une forte erreur sur la porosité va se traduire par une faible erreur sur le volume de gaz.



**Figure 3.17:** *Maximum d'amplitude des ondes P réfléchies par la formation Utsira en fonction du changement de module d'incompressibilité drainé  $K_D$  dans le milieu (trait plein). En traits pointillés, maximum d'amplitude de la différence entre les sismogrammes sans et avec variation de  $K_D$ . Le taux  $S_2$  de CO<sub>2</sub> introduit est de 20%.*

### Variation du module d'incompressibilité drainé $K_D$

La variation de  $K_D$  pouvant être conséquente à des phénomènes de dissolution et de précipitation des carbonates va faire varier faiblement l'amplitude des ondes réfléchies. Plus  $K_D$  est grand, plus l'amplitude des ondes réfléchies va être faible. La vitesse des ondes Pf varie linéairement avec  $K_D$ , une variation de 20% de  $K_D$  va se traduire par un changement de vitesse de l'ordre de 3% pour  $S_2=0.2$ . La même variation de  $K_D$  va se traduire par de plus grandes perturbations de vitesse plus le taux de CO<sub>2</sub> est élevé.

Tout comme pour la porosité, il va être impossible de différencier à partir des ondes sismiques une variation de  $K_D$  d'une faible variation du taux de CO<sub>2</sub>.

## 3.4 Conclusion

La sismique réflexion est une méthode permettant de surveiller le stockage géologique du dioxyde de carbone dans des aquifères salés. La profondeur de ces stockages oblige à considérer une dépendance du fluide à la pression et à la température. Le fluide est constitué d'un mélange d'eau salée contenant du CO<sub>2</sub> dissous et de CO<sub>2</sub> libre dans un

état supercritique.

J'ai mené des modélisations numériques des ondes réfléchies en considérant le modèle géologique de Sleipner. L'injection de CO<sub>2</sub> a été expérimentée depuis 1996 dans le sable Utsira, à environ 1000 mètres de profondeur sous la mer du Nord.

J'ai regardé l'influence sur les ondes sismiques Pf du taux de CO<sub>2</sub>, de sa position, et de la dissolution-précipitation des carbonates. Plus la quantité de CO<sub>2</sub> injecté est importante, plus les réflexions sont énergétiques. L'amplitude des réflexions et la diminution de la vitesse, sont des marqueurs importants de la présence de CO<sub>2</sub>. Il est cependant nécessaire de connaître la géométrie des couches de CO<sub>2</sub> pour estimer le taux de CO<sub>2</sub>. Par contre, les variations de porosité et de module d'incompressibilité du squelette associées à de la dissolution-précipitation de carbonate de calcium ont des influences relativement faibles sur les ondes sismiques en comparaison de l'influence de la concentration en CO<sub>2</sub>.

Les paramètres du solide et la position des interfaces géologiques sont estimés avant l'injection. De plus, le volume total de CO<sub>2</sub> injecté est connu. Le taux de CO<sub>2</sub> n'est donc pas totalement indépendant de la position. L'amplitude des ondes réfléchies et les vitesses de l'onde P pourrait donc théoriquement permettre de retrouver les contrastes de fluide et la géométrie du CO<sub>2</sub>. Sur un profil sismique migré, l'amplitude des ondes réfléchies suffirait pour estimer ces paramètres.

Cette étude a cependant été menée pour un cas simplifiés : les ondes synthétiques ont été calculées dans un milieu à une dimension. De plus, la géométrie du site de Sleipner est idéale : le milieu géologique est très peu réfléchissant avant l'injection de CO<sub>2</sub>. Les ondes réfléchies nous intéressant ont donc des amplitudes fortes et ne sont pas masquées par d'autres ondes réfléchies. La non consolidation du sable rend les ondes sismiques beaucoup plus sensibles aux paramètres du fluide qu'à ceux des grains, comme montré dans le chapitre suivant.

Cette étude de sensibilité, appliquée à une thématique et un milieu géologique particulier, mérite d'être généralisée. La sensibilité des ondes aux paramètres poro-élastiques doit être regardée dans une approche la plus générale possible.



# Chapitre 4

## Sensibilité du champ d'ondes aux paramètres des milieu poreux

### Sommaire

---

4.1	Introduction . . . . .	92
4.2	Wave propagation in stratified porous media . . . . .	94
4.3	Fréchet derivatives of the plane wave reflectivity . . . . .	98
4.4	Numerical simulations and accuracy tests . . . . .	105
4.5	Sensitivity study . . . . .	111
4.6	Conclusions . . . . .	113

---

### Problématique

Ce chapitre est consacré au calcul de l'expression semi-analytique des Dérivées de Fréchet, qui sont les dérivées du déplacement sismique par rapport aux paramètres poro-élastiques. Ce calcul repose sur l'approximation de Born. Ces opérateurs mathématiques ont deux intérêts :

- Tout d'abord, ils interviennent dans l'algorithme d'inversion par moindres carrés (cf. partie II) ;
- Ils permettent d'évaluer la sensibilité des ondes sismiques aux paramètres poro-élastiques. Il est ainsi possible de savoir quels paramètres pourra être déterminés par un algorithme d'inversion.

Ce chapitre a fait l'objet de deux publications : l'une pour le congrès de la *Society of Exploration Geophysicists* (De Barros et Dietrich, 2006), la seconde, plus complète, a été soumise et acceptée au *Journal of Acoustical Society of America*. Cet article est présenté dans ce chapitre.

## Perturbations of the seismic reflectivity of a fluid-saturated depth-dependent poro-elastic medium

Louis De Barros <sup>1</sup> and Michel Dietrich <sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique (LGIT), CNRS, Université Joseph Fourier, BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France

<sup>2</sup> Institut Français du Pétrole, 92852 Rueil-Malmaison, France

### abstract

Analytical formulas are derived to compute the first-order effects produced by plane inhomogeneities on the point source seismic response of a fluid-filled stratified porous medium. The derivation is achieved by a perturbation analysis of the poro-elastic wave equations in the plane-wave domain using the Born approximation. This approach yields the Fréchet derivatives of the  $P - SV$ - and  $SH$ -wave responses in terms of the Green's functions of the unperturbed medium. The accuracy and stability of the derived operators are checked by comparing, in the time-distance domain, differential seismograms computed from these analytical expressions with complete solutions obtained by introducing discrete perturbations into the model properties. For vertical and horizontal point forces, it is found that the Fréchet derivative approach is remarkably accurate for small and localized perturbations of the medium properties which are consistent with the Born approximation requirements. Furthermore, the first-order formulation appears to be stable at all source-receiver offsets. The porosity, consolidation parameter, solid density and mineral shear modulus appear to be the most sensitive parameters in forward and inverse modeling problems. Finally, the Amplitude-Versus-Angle response of a thin layer shows strong coupling effects between several model parameters.

## 4.1 Introduction

The evaluation of the sensitivity of a seismic wave field to small perturbations of the material properties is a classical issue of seismology which arises in the solution of forward and inverse scattering problems (Aki et Richards, 1980; Tarantola, 1984b). Sensitivity operators are mainly useful for the optimal design of field or laboratory experiments, for the interpretation of time-lapse monitoring surveys, and for the development of imaging and linearized inversion techniques. In particular, sensitivity operators play a central role in least-square inversion schemes using gradient techniques. All these applications, especially the latter, call for fast and effective numerical computation methods of the sensitivity operators. Indeed, the most intuitive approach to compute the perturbational or differential seismograms in a structure described by  $N$  parameters is to use a finite perturbation scheme that demands  $N + 1$  forward modeling computations. This approach rapidly becomes prohibitive as the number of parameters increases. The problem can be

solved more elegantly by first deriving the so-called Fréchet derivatives of the seismic wave fields with respect to material properties. Although restricted to first-order effects only, this procedure makes it possible to efficiently predict small changes of the seismic response resulting from slight modifications of the material properties. Furthermore, this solution can be implemented by solving only one large forward problem.

One of the most significant contributions in this area is the work of Tarantola (1984b) who applied a first-order perturbation analysis to the elastodynamic wave equation to derive a series of general formulas relating the scattered wave field to heterogeneities in an arbitrarily complex elastic medium. The same approach was subsequently used in a more restrictive sense for layered media in the plane-wave domain by Pan et al. (1988) in the acoustic case and by Dietrich et Kormendi (1990) in the  $P - SV$  case. The Fréchet derivatives obtained in these different cases are all expressed as combinations of the incident wave field generated by the seismic source at the scatterer location and the Green's functions between the scatterer and receiver locations. The structure of these expressions underlines the fact that the scattered waves due to perturbations in the material properties (usually density and acoustic or elastic parameters) can be interpreted as a wave field generated by a set of secondary body forces coincident with the heterogeneities, and determined by complex interactions between the incident waves and the medium perturbations. This structure is met with all problems of acoustic, seismic or electromagnetic wave propagation in weakly inhomogeneous media, and will also be found in more complex situations such as anisotropic or poro-elastic media.

The poro-elastic model, which is the subject of this paper, involves more parameters than the visco-elastic case, but on the other hand, the wave velocities, attenuation and dispersion characteristics are computed from the medium's intrinsic properties without having to resort to empirical relationships. Since the pioneering work of Biot (1956), many authors (Dutta et Odé, 1979; Auriault et al., 1985; Johnson et al., 1994, for example) have introduced improvements of the poro-elastodynamic equations, either by averaging or by integrating techniques. The Biot (1956) theory and its applications is still a field of active research, as demonstrated by the large number of current publications devoted to the subject (see, e.g., Trifunac, 2006). The forward problem, i.e., the computation of synthetic seismograms in poro-elastic media has been solved in different configurations and with several techniques (Dai et al., 1995; Carcione, 1996; Haartsen et Pride, 1997; Garambois et Dietrich, 2002). However, the inverse problem has only been rarely addressed, and to our knowledge, it has never been without first estimating the wave velocities (Chotiros, 2002; Berryman et al., 2002; Spikes et al., 2006). Yet, inversion algorithms can provide useful information on the material properties, notably permeability and porosity which are the most important parameters to characterize porous media.

The main objective of this work is to extend the methodology used in the elastic case (Dietrich et Kormendi, 1990) to obtain the Fréchet derivatives for stratified poro-elastic

media. We consider here a depth-dependent, fluid-saturated porous medium representing reservoir rocks or sedimentary layers. The computation of the point source seismic response of the layered structure is carried out by combining the Generalized Reflection and Transmission Matrix Method (Kennett, 1983) with the discrete wavenumber technique (Bouchon, 1981). This combination was already implemented by Garambois et Dietrich (2002) for the numerical simulation of the coupled seismic and electromagnetic wave propagation in porous media by using the work of Pride (1994). In the following sections, we first present the governing equations and constitutive parameters for porous materials before expressing the wave propagation equations for depth-dependent media. Next, we develop the analytical computation of the Fréchet derivatives in the frequency–ray parameter domain for the  $P - SV$ - and  $SH$ -wave cases. Finally, we check the accuracy of the sensitivity operators obtained in the time-distance domain, both in an infinite medium and in a complex seismic model. We conclude with the sensitivity of the seismic waveforms with respect to the different model parameters.

## 4.2 Wave propagation in stratified porous media

### 4.2.1 Governing equations

Assuming a  $e^{-i\omega t}$  dependence, where  $t$  is time and  $\omega$  the angular frequency, Pride (1994, 2005) rewrote Biot's (1956) equations of poroelasticity in the form

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = -\omega^2(\rho \mathbf{u} + \rho_f \mathbf{w}) \\ \boldsymbol{\tau} = [K_U \nabla \cdot \mathbf{u} + C \nabla \cdot \mathbf{w}] \mathbf{I} + G [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T - 2/3 (\nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{I}))] \\ -P = C \nabla \cdot \mathbf{u} + M \nabla \cdot \mathbf{w} \\ -\nabla P = -\omega^2 \rho_f \mathbf{u} - \omega^2 \tilde{\rho} \mathbf{w} , \end{array} \right. \quad (4.1)$$

where  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{w}$  are the solid average displacement and the relative fluid-to-solid displacement, respectively. More precisely, defining  $\mathbf{u}_s$  and  $\mathbf{u}_f$  as the displacements of the solid and fluid phases of a porous continuum, we can write  $\mathbf{u} \simeq \mathbf{u}_s$  and  $\mathbf{w} = \phi(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_f)$ , where  $\phi$  is the porosity.  $P$  represents the interstitial pressure and  $\boldsymbol{\tau}$  is the  $3 \times 3$  stress tensor.  $\rho$  denotes the density of the porous medium which is related to the fluid density  $\rho_f$ , solid density  $\rho_s$  and porosity  $\phi$  via the relationship

$$\rho = (1 - \phi) \rho_s + \phi \rho_f . \quad (4.2)$$

The undrained bulk modulus  $K_U$  is defined under the condition  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ .  $G$  is the shear modulus of a drained or an undrained medium as it is independent of the fluid properties (Gassmann, 1951). The fluid storage coefficient  $M$  represents the amount of fluid a sample can accumulate at constant sample volume. Biot's  $C$  modulus is a mechanical parameter describing the variation of the fluid pressure due to a change of the sample volume in an

undrained medium. At low frequencies, these parameters as well as the Lamé parameter  $\lambda_u$  defined below are real, frequency-independent and can be expressed in terms of the drained modulus  $K_D$ , porosity  $\phi$ , mineral modulus of the grains  $K_s$  and fluid modulus  $K_f$  (Gassmann, 1951) :

$$\begin{aligned} K_U &= \frac{\phi K_D + \left[ 1 - (1 + \phi) \frac{K_D}{K_s} \right] K_f}{\phi (1 + \Delta)} , \quad \lambda_U = K_U - \frac{2}{3} G \\ C &= \frac{\left[ 1 - \frac{K_D}{K_s} \right] K_f}{\phi (1 + \Delta)} , \quad M = \frac{K_f}{\phi (1 + \Delta)} \\ \text{with } \Delta &= \frac{1 - \phi}{\phi} \frac{K_f}{K_s} \left[ 1 - \frac{K_D}{(1 - \phi) K_s} \right] . \end{aligned} \quad (4.3)$$

It is also possible to link the bulk properties  $K_D$  and  $G$  to the porosity and constitutive mineral properties via empirical relationships derived from experimental results (Pride, 2005; Bemmer et al., 2004) :

$$K_D = K_s \frac{1 - \phi}{1 + c_s \phi} \quad \text{and} \quad G = G_s \frac{1 - \phi}{1 + 3 c_s \phi / 2} . \quad (4.4)$$

Equations (4.4) have the merit of being very simple and introduce only two additional parameters, namely, the shear modulus of the grains  $G_s$  and the consolidation parameter  $c_s$ . The latter mainly depends on the cementing properties of the grains, but also on the pore shape. The value of the consolidation parameter  $c_s$  is typically between 2 to 20 in a consolidated medium, and can be very much greater than 20 in an unconsolidated soil.

Finally, the wave attenuation is explained by Darcy's law which uses a complex, frequency-dependent dynamic permeability (Johnson et al., 1994) :

$$\tilde{\rho} = i \frac{\eta}{\omega k(\omega)} \quad \text{with} \quad k(\omega) = k_0 / \left[ \sqrt{1 - i \frac{4}{n_J} \frac{\omega}{\omega_c}} - i \frac{\omega}{\omega_c} \right] . \quad (4.5)$$

The dynamic permeability  $k(\omega)$  tends toward the hydrogeological (dc) permeability  $k_0$  at low frequencies where viscous losses are dominant. It includes a correction accounting for the inertial effects at higher frequencies. These two domains are separated by the relaxation frequency

$$\omega_c = \frac{\eta}{\rho_f F k_0} \quad (4.6)$$

where  $\eta$  is the viscosity of the fluid. Archie's law (  $F = \phi^{-m}$  ) expresses the electrical formation factor  $F$  in terms of the porosity  $\phi$  and cementing exponent  $m$  whose value is between 1 to 2 depending on the pore topology. Parameter  $n_J$  is considered constant and equal to 8 to simplify the equations. We refer the reader to the work of Pride (2005) for more information on the parameters used in this study.

### 4.2.2 Coupled second-order equations for plane waves

The horizontally layered model lends itself to a number of analytical developments if one performs a plane wave decomposition of the wave fields represented by equations (4.1). This procedure involves a series of changes of variables and integral transforms which are described in detail by Kennett (1983) in the elastic case. As in the elastic case, the introduction of new variables (Hudson, 1969) leads to a useful decomposition into  $P-SV$ - and  $SH$ -wave systems in cylindrical coordinates. By applying the whole sequence of transformations and arranging the terms, we find that the governing equations of the  $P-SV$ -wave system in depth-dependent poro-elastic media reduce to the following system of second-order equations in the angular frequency  $\omega$  and ray parameter  $p$  domain :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{1z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\lambda_U + 2G) \frac{\partial U}{\partial z} + C \frac{\partial W}{\partial z} - \omega p (\lambda_U V + C X) \right] - \omega p G \frac{\partial V}{\partial z} \\ \quad + \omega^2 [ \rho U - p^2 G U + \rho_f W ] \\ F_{1r} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ G \frac{\partial V}{\partial z} + \omega p G U \right] + \omega p \left[ \lambda_U \frac{\partial U}{\partial z} + C \frac{\partial W}{\partial z} \right] \\ \quad + \omega^2 [ \rho V - p^2 (\lambda_U + 2G) V - p^2 C X ] \\ F_{2z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ C \frac{\partial U}{\partial z} - \omega p C V + M \frac{\partial W}{\partial z} - \omega p M X \right] + \omega^2 [ \rho_f U + \tilde{\rho} W ] \\ F_{2r} = \omega p \left[ C \frac{\partial U}{\partial z} + M \frac{\partial W}{\partial z} \right] + \omega^2 [ \rho_f V + \tilde{\rho} X - p^2 (C V + M X) ] . \end{array} \right. \quad (4.7)$$

In these equations,  $U = U(z_R, \omega; z_S)$  and  $V = V(z_R, \omega; z_S)$  respectively denote the vertical and radial components of the solid displacements. Similarly,  $W = W(z_R, \omega; z_S)$  and  $X = X(z_R, \omega; z_S)$  respectively denote the vertical and radial components of the relative fluid-to-solid displacements. Variables  $z_R$  and  $z_S$  stand for the receiver and seismic source depths. Equations (4.7) are valid in the presence of body forces  $\mathbf{F}_1 = [F_{1z}(z_S, \omega), F_{1r}(z_S, \omega)]^T$  and  $\mathbf{F}_2 = [F_{2z}(z_S, \omega), F_{2r}(z_S, \omega)]^T$  defined by their vertical ( $z$  index) and radial ( $r$  index) components : force  $\mathbf{F}_1$  is applied on an average volume of porous medium and represents a stress discontinuity, while force  $\mathbf{F}_2$  is derived from the pressure gradient in the fluid.

We can then cast equations (4.7) in the form of a matrix differential equation as

$$\mathbf{L}^{\text{PSV}} \mathbf{Q}^{\text{PSV}} = \mathbf{F}^{\text{PSV}}, \quad \text{where} \quad \mathbf{Q}^{\text{PSV}} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ X \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{F}^{\text{PSV}} = \begin{bmatrix} F_{1z} \\ F_{1r} \\ F_{2z} \\ F_{2r} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

$\mathbf{L}^{\text{PSV}}$  is a differential operator given by

$$\mathbf{L}^{\text{PSV}} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mathbf{M}_1^{\text{PSV}} \frac{\partial}{\partial z} + \omega p \mathbf{M}_2^{\text{PSV}} \right) - \omega p [\mathbf{M}_2^{\text{PSV}}]^T \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 (\mathbf{M}_3^{\text{PSV}} - p^2 \mathbf{M}_4^{\text{PSV}}) \quad (4.9)$$

where the  $\mathbf{M}_i^{\text{PSV}}$ ,  $i = 1..4$  are  $4 \times 4$  matrices defined by

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1^{\text{PSV}} &= \begin{bmatrix} \lambda_U + 2G & 0 & C & 0 \\ 0 & G & 0 & 0 \\ C & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{M}_2^{\text{PSV}} &= \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_U & 0 & -C \\ G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C & 0 & -M \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{M}_3^{\text{PSV}} &= \begin{bmatrix} \rho & 0 & \rho_f & 0 \\ 0 & \rho & 0 & \rho_f \\ \rho_f & 0 & \tilde{\rho} & 0 \\ 0 & \rho_f & 0 & \tilde{\rho} \end{bmatrix}, & \mathbf{M}_4^{\text{PSV}} &= \begin{bmatrix} G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_U + 2G & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & M \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Apart from the dimensions of the matrices, we may note that equations (4.9) and (4.10) are very similar to the expressions obtained in the elastic case.

Formally, equation (4.8) admits an integral solution for the displacement fields in terms of the Green's functions of the problem. For example, the vertical displacement  $U$  at depth  $z_R$  and frequency  $\omega$  is given by

$$U(z_R, \omega) = \int_{\mathcal{M}} [ G_{1z}^{1z}(z_R, \omega; z') F_{1z}(z', \omega) + G_{1z}^{2z}(z_R, \omega; z') F_{2z}(z', \omega) + G_{1z}^{1r}(z_R, \omega; z') F_{1r}(z', \omega) + G_{1z}^{2r}(z_R, \omega; z') F_{2r}(z', \omega) ] dz', \quad (4.11)$$

where  $G_{ij}^{kl}(z_R, \omega, z_S)$  is the Green's function corresponding to the displacement at depth  $z_R$  of phase  $i$  ( $i = 1, 2$  correspond to solid and relative fluid-to-solid motions, respectively) in direction  $j$  ( $z$  or  $r$ ) generated by a harmonic point force  $F_{kl}(z_S, \omega)$  ( $k = 1, 2$ ) at depth  $z_S$  in direction  $l$  ( $z$  or  $r$ ). A total of 16 different Green's functions are needed to express the 4 displacements  $U$ ,  $V$ ,  $W$  and  $X$  in the  $P - SV$ -wave system (4 displacements  $\times$  4 forces).

The integrals of equation (4.11) are taken over the depths  $z'$  of a region  $\mathcal{M}$  including the body forces  $\mathbf{F}_1$  and  $\mathbf{F}_2$ . In the case of a vertical point force at depth  $z_S$ , the expressions of the forces become

$$\begin{cases} F_{1z}(z_S, \omega) = \delta(z - z_S) S_1(\omega) \\ F_{1r}(z_S, \omega) = 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} F_{2z}(z_S, \omega) = \delta(z - z_S) S_2(\omega) \\ F_{2r}(z_S, \omega) = 0 \end{cases}, \quad (4.12)$$

where  $S_1(\omega)$  and  $S_2(\omega)$  are the Fourier transforms of the source time functions associated with forces  $F_1$  and  $F_2$ . Assuming that the amplitudes of both forces are similar ( $\|\mathbf{F}_1\| \simeq \|\mathbf{F}_2\|$ ) (Garambois et Dietrich, 2002), we take  $S(\omega) = S_1(\omega) = S_2(\omega)$ . The displacements fields for a vertical point force can then be written in simple forms with the Green's functions :

$$\begin{aligned} U(z_R, \omega; z_S) &= [ G_{1z}^{1z}(z_R, \omega; z_S) + G_{1z}^{2z}(z_R, \omega; z_S) ] S(\omega) \\ V(z_R, \omega; z_S) &= [ G_{1r}^{1z}(z_R, \omega; z_S) + G_{1r}^{2z}(z_R, \omega; z_S) ] S(\omega) \\ W(z_R, \omega; z_S) &= [ G_{2z}^{1z}(z_R, \omega; z_S) + G_{2z}^{2z}(z_R, \omega; z_S) ] S(\omega) \\ X(z_R, \omega; z_S) &= [ G_{2r}^{1z}(z_R, \omega; z_S) + G_{2r}^{2z}(z_R, \omega; z_S) ] S(\omega). \end{aligned} \quad (4.13)$$

The displacements fields corresponding to a horizontal point force and to an explosive point source are similarly defined. Explosions would be represented by Green's functions  $G_{ij}^{kE}$  ( $i = 1, 2$ ;  $j = z, r$ ;  $k = 1, 2$ ) to account for the radiation of an explosive point source  $E$ .

The  $SH$  case is treated in exactly the same way as the  $P-SV$  case. The corresponding second-order differential equations of motion are

$$\begin{cases} F_{1t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ G \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \omega^2 [ -p^2 G T + \rho T + \rho_f Y ] \\ F_{2t} = \omega^2 [ \rho_f T + \tilde{\rho} Y ], \end{cases} \quad (4.14)$$

where  $T = T(z_R, \omega; z_S)$  and  $Y = Y(z_R, \omega; z_S)$  stand for the transverse solid and fluid-to-solid displacements;  $F_{1t}(z_S, \omega)$  and  $F_{2t}(z_S, \omega)$  are the transverse components of body forces  $\mathbf{F}_1$  and  $\mathbf{F}_2$ .

As before, we can rewrite equations (4.14) in matrix form as

$$\mathbf{L}^{\text{SH}} \mathbf{Q}^{\text{SH}} = \mathbf{F}^{\text{SH}}, \quad \text{where} \quad \mathbf{Q}^{\text{SH}} = \begin{bmatrix} T \\ Y \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{F}^{\text{SH}} = \begin{bmatrix} F_{1t} \\ F_{2t} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Here,  $\mathbf{L}^{\text{SH}}$  is a linear operator defined as

$$\mathbf{L}^{\text{SH}} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mathbf{M}_1^{\text{SH}} \frac{\partial}{\partial z} \right) + \omega^2 ( \mathbf{M}_2^{\text{SH}} - p^2 \mathbf{M}_1^{\text{SH}} ) \quad (4.16)$$

where the  $\mathbf{M}_i^{\text{SH}}, i = 1..4$ , are  $2 \times 2$  matrices defined by

$$\mathbf{M}_1^{\text{SH}} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2^{\text{SH}} = \begin{bmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & \tilde{\rho} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

## 4.3 Fréchet derivatives of the plane wave reflectivity

### 4.3.1 Statement of the problem

The Fréchet derivatives are usually introduced by considering the forward problem of the wave propagation, in which a set of synthetic seismograms  $\mathbf{d}$  is computed for an earth model  $\mathbf{m}$  using the non-linear relationship  $\mathbf{d} = \mathbf{f}(\mathbf{m})$ . Tarantola (1984b) uses a Taylor series expansion to relate a small perturbation  $\delta\mathbf{m}$  in the model parameters to a small perturbation  $\delta\mathbf{f}$  in the wave field

$$\mathbf{f}(\mathbf{m} + \delta\mathbf{m}) = \mathbf{f}(\mathbf{m}) + \mathbf{D} \delta\mathbf{m} + \mathbf{o}(\|\delta\mathbf{m}\|^2) \quad \text{or} \quad \delta\mathbf{f} = \mathbf{D} \delta\mathbf{m} \quad (4.18)$$

where  $\mathbf{D} = \partial\mathbf{f} / \partial\mathbf{m}$  is the matrix of Fréchet derivatives.

Our aim is to compute the various Fréchet derivatives corresponding to slight modifications of the model parameters at a given depth. Considering for instance the density at



depth  $z$ , this problem reduces, in the  $P - SV$  case, to finding analytical expressions for the quantities

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1^{\text{PSV}}(z_R, \omega; z_S|z) &= \frac{\partial U(z_R, \omega; z_S)}{\partial \rho(z)} \\ \mathcal{A}_2^{\text{PSV}}(z_R, \omega; z_S|z) &= \frac{\partial V(z_R, \omega; z_S)}{\partial \rho(z)} \\ \mathcal{A}_3^{\text{PSV}}(z_R, \omega; z_S|z) &= \frac{\partial W(z_R, \omega; z_S)}{\partial \rho(z)} \\ \mathcal{A}_4^{\text{PSV}}(z_R, \omega; z_S|z) &= \frac{\partial X(z_R, \omega; z_S)}{\partial \rho(z)} .\end{aligned}\tag{4.19}$$

We can similarly define the Fréchet derivatives  $\mathcal{B}_i^{\text{PSV}}$ ,  $\mathcal{C}_i^{\text{PSV}}$ ,  $\mathcal{D}_i^{\text{PSV}}$ ,  $\mathcal{E}_i^{\text{PSV}}$ ,  $\mathcal{F}_i^{\text{PSV}}$  and  $\mathcal{G}_i^{\text{PSV}}$ ,  $i = 1..4$ , for model parameters  $\rho_f$ ,  $\tilde{\rho}$ ,  $C$ ,  $M$ ,  $\lambda_U$  and  $G$ . This is the natural choice of parameters to carry out a perturbation analysis because of the linear dependence of these parameters with the wave equations. We also introduce the set of Fréchet derivatives  $\hat{\mathcal{A}}_i^{\text{PSV}}$ ,  $\hat{\mathcal{B}}_i^{\text{PSV}}$ ,  $\hat{\mathcal{C}}_i^{\text{PSV}}$ ,  $\hat{\mathcal{D}}_i^{\text{PSV}}$ ,  $\hat{\mathcal{E}}_i^{\text{PSV}}$ ,  $\hat{\mathcal{F}}_i^{\text{PSV}}$ ,  $\hat{\mathcal{G}}_i^{\text{PSV}}$  and  $\hat{\mathcal{H}}_i^{\text{PSV}}$ ,  $i = 1..4$ , corresponding to model parameters  $\rho_s$ ,  $\rho_f$ ,  $k_0$ ,  $\phi$ ,  $K_s$ ,  $K_f$ ,  $G_s$  and  $c_s$  which we will use in a second stage, and which are more convenient to use as physical parameters of the problem. The sensitivity operators are derived by following the procedure presented in Dietrich et Kormendi (1990) for the elastic case.

### 4.3.2 Perturbation analysis

We first present, with some detail, the perturbation analysis for the  $P - SV$  case before addressing the simpler  $SH$  case. We consider small changes in the model parameters at a given depth  $z$  that result in small perturbations  $\Delta \mathbf{Q}^{\text{PSV}} = [\delta U, \delta V, \delta W, \delta X]^T$  of the seismic wave field and a modified seismic response  $\mathbf{Q}'^{\text{PSV}} = [U', V', W', X']^T$ . The latter can be written in matrix form

$$\mathbf{Q}'^{\text{PSV}} = \mathbf{Q}^{\text{PSV}} + \Delta \mathbf{Q}^{\text{PSV}}\tag{4.20}$$

by assuming that the magnitudes of the scattered waves  $\Delta \mathbf{Q}^{\text{PSV}}$  are much smaller than those of the primary waves  $\mathbf{Q}^{\text{PSV}}$ . Considering for instance the first component of this matrix equation

$$U'(z_R, \omega; z_S) = U(z_R, \omega; z_S) + \delta U(z_R, \omega; z_S) ,\tag{4.21}$$

we can write the scattered displacement  $\delta U$  as

$$\begin{aligned}\delta U(z_R, \omega; z_S) &= \int_{\mathcal{M}} [ \mathcal{A}_1^{\text{PSV}}(z_R, \omega; z_S|z) \delta \rho(z) + \mathcal{B}_1^{\text{PSV}}(z_R, \omega; z_S|z) \delta \rho_f(z) + \\ &\quad \mathcal{C}_1^{\text{PSV}}(z_R, \omega; z_S|z) \delta \tilde{\rho}(z) + \mathcal{D}_1^{\text{PSV}}(z_R, \omega; z_S|z) \delta C(z) + \\ &\quad \mathcal{E}_1^{\text{PSV}}(z_R, \omega; z_S|z) \delta M(z) + \mathcal{F}_1^{\text{PSV}}(z_R, \omega; z_S|z) \delta \lambda_U(z) + \\ &\quad \mathcal{G}_1^{\text{PSV}}(z_R, \omega; z_S|z) \delta G(z) ] dz .\end{aligned}\tag{4.22}$$

With the model parametrization adopted (i.e., a linear dependence of the model parameters with the wave equation), the perturbation analysis can mainly be done in symbolic form. Indeed, the wave operator  $\mathbf{L}^{\text{PSV}}$  in the perturbed medium can be written as

$$\mathbf{L}'^{\text{PSV}} = \mathbf{L}^{\text{PSV}} + \Delta \mathbf{L}^{\text{PSV}}, \quad (4.23)$$

so that equation (4.8) become (Hudson et Heritage, 1981),

$$\left( \mathbf{L}^{\text{PSV}} + \Delta \mathbf{L}^{\text{PSV}} \right) \left( \mathbf{Q}^{\text{PSV}} + \Delta \mathbf{Q}^{\text{PSV}} \right) = \mathbf{F}^{\text{PSV}}. \quad (4.24)$$

We then use the single scattering (or Born) approximation to solve the above equation for  $\Delta \mathbf{Q}^{\text{PSV}}$  under the assumption (already used above) that  $\|\Delta \mathbf{Q}^{\text{PSV}}\| \ll \|\mathbf{Q}^{\text{PSV}}\|$ . Combining this approximation with equation (4.8), we obtain

$$\mathbf{L}^{\text{PSV}} \Delta \mathbf{Q}^{\text{PSV}} \simeq -\Delta \mathbf{L}^{\text{PSV}} \mathbf{Q}^{\text{PSV}} \equiv \Delta \mathbf{F}^{\text{PSV}} \quad (4.25)$$

This matrix equation shows that the scattered waves  $\Delta \mathbf{Q}^{\text{PSV}}$  due to perturbations of the material properties can be interpreted as a wave field generated by secondary body forces  $\Delta \mathbf{F}^{\text{PSV}}$  defined by the interaction of the incident waves with the heterogeneities (term  $\Delta \mathbf{L}^{\text{PSV}} \mathbf{Q}^{\text{PSV}}$ ). Moreover, this wave field propagates in the unperturbed medium represented by the wave operator  $\mathbf{L}^{\text{PSV}}$ . Consequently, matrix equation (4.25) has for each of its components a solution similar to equation (4.11), by substituting  $\Delta \mathbf{F}^{\text{PSV}}$  for  $\mathbf{F}^{\text{PSV}}$  and  $\Delta \mathbf{Q}^{\text{PSV}}$  for  $\mathbf{Q}^{\text{PSV}}$ . Considering again the scattered displacement  $\delta U$ , we have

$$\delta U(z_R, \omega; z_S) = \int_{\mathcal{M}} \left[ G_{1z}^{1z}(z_R, \omega; z') \delta F_{1z}(z', \omega) + G_{1z}^{2z}(z_R, \omega; z') \delta F_{2z}(z', \omega) + \right. \quad (4.26) \\ \left. G_{1z}^{1r}(z_R, \omega; z') \delta F_{1r}(z', \omega) + G_{1z}^{2r}(z_R, \omega; z') \delta F_{2r}(z', \omega) \right] dz',$$

where the secondary Born sources  $\delta F_{1z}, \delta F_{1r}, \delta F_{2z}, \delta F_{2r}$  are obtained from equation (4.7) :

$$\Delta \mathbf{F}^{\text{PSV}} = \begin{pmatrix} \delta F_{1z} \\ \delta F_{1r} \\ \delta F_{2z} \\ \delta F_{2r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} \left[ (\delta \lambda_U + 2 \delta G) \frac{\partial U}{\partial z} + \delta C \frac{\partial W}{\partial z} - \omega p (\delta \lambda_U V + \delta C X) \right] \\ + \omega p \delta G \frac{\partial V}{\partial z} - \omega^2 [\delta \rho U - p^2 \delta G U + \delta \rho_f W] \\ -\frac{\partial}{\partial z} \left[ \delta G \frac{\partial V}{\partial z} + \omega p \delta G U \right] - \omega p \left[ \delta \lambda_U \frac{\partial U}{\partial z} + \delta C \frac{\partial W}{\partial z} \right] \\ - \omega^2 [\delta \rho V - p^2 (\delta \lambda_U + 2 \delta G) V - p^2 \delta C X] \\ -\frac{\partial}{\partial z} \left[ \delta C \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \omega p V \right) + \delta M \left( \frac{\partial W}{\partial z} - \omega p X \right) \right] \\ - \omega^2 [\delta \rho_f U + \delta \tilde{\rho} W] \\ -\omega p \left[ \delta C \frac{\partial U}{\partial z} + \delta M \frac{\partial W}{\partial z} \right] \\ - \omega^2 [\delta \rho_f V + \delta \tilde{\rho} X - p^2 (\delta C V + \delta M X)] \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

By inserting these expressions into equation (4.26) and integrating by parts in order to separate the contributions in  $\delta \rho$ ,  $\delta \rho_f$ ,  $\delta \tilde{\rho}$ ,  $\delta C$ ,  $\delta M$ ,  $\delta \lambda_U$  and  $\delta G$ , we obtain an integral

representation of the scattered wave field  $\delta U$  that we can directly identify with equation (4.22) to get the Fréchet derivatives  $\mathcal{A}_1^{\text{PSV}}$ ,  $\mathcal{B}_1^{\text{PSV}}$ ,  $\mathcal{C}_1^{\text{PSV}}$ ,  $\mathcal{D}_1^{\text{PSV}}$ ,  $\mathcal{E}_1^{\text{PSV}}$ ,  $\mathcal{F}_1^{\text{PSV}}$  and  $\mathcal{G}_1^{\text{PSV}}$  corresponding to displacement  $U$  :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1^{\text{PSV}} &= -\omega^2 [ U G_{1z}^{1z} + V G_{1z}^{1r} ] \\
 \mathcal{B}_1^{\text{PSV}} &= -\omega^2 [ W G_{1z}^{1z} + U G_{1z}^{2z} + V G_{1z}^{2r} ] \\
 \mathcal{C}_1^{\text{PSV}} &= -\omega^2 [ W G_{1z}^{2z} + X G_{1z}^{2r} ] \\
 \mathcal{D}_1^{\text{PSV}} &= \left[ \frac{\partial W}{\partial z} - \omega p X \right] \left[ \frac{\partial G_{1z}^{1z}}{\partial z} - \omega p G_{1z}^{1r} \right] + \left[ \frac{\partial U}{\partial z} - \omega p V \right] \left[ \frac{\partial G_{1z}^{2z}}{\partial z} - \omega p G_{1z}^{2r} \right] \\
 \mathcal{E}_1^{\text{PSV}} &= \left[ \frac{\partial W}{\partial z} - \omega p X \right] \left[ \frac{\partial G_{1z}^{2z}}{\partial z} - \omega p G_{1z}^{2r} \right] \\
 \mathcal{F}_1^{\text{PSV}} &= \left[ \frac{\partial U}{\partial z} - \omega p V \right] \left[ \frac{\partial G_{1z}^{1z}}{\partial z} - \omega p G_{1z}^{1r} \right] \\
 \mathcal{G}_1^{\text{PSV}} &= \left[ \frac{\partial V}{\partial z} + \omega p U \right] \left[ \frac{\partial G_{1z}^{1r}}{\partial z} + \omega p G_{1z}^{1z} \right] + 2 \left[ \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial G_{1z}^{1z}}{\partial z} + \omega^2 p^2 V G_{1z}^{1r} \right] .
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Here,  $U = U(z, \omega; z_S)$ ,  $V = V(z, \omega; z_S)$ ,  $W = W(z, \omega; z_S)$  and  $X = X(z, \omega; z_S)$  denote the incident wave fields at the model perturbations. These wave fields can be expressed in terms of Green's functions using equations (4.13) for a vertical point force, and similarly for a horizontal point force or for an explosive point source. Expressions  $G_{ij}^{kl} = G_{ij}^{kl}(z_R, \omega; z)$  represent the Green's functions conveying the scattered wave fields from the inhomogeneities to the receivers, as noted before. A total of 32 Green's functions (16 for up-going waves and another 16 for down-going waves) are to be computed to completely solve these equations.

The Fréchet derivatives for the radial displacement  $V$  are easily deduced from expressions (4.28) by changing  $G_{1z}^{kl}$  to  $G_{1r}^{kl}$ . In the same way, the Fréchet derivatives corresponding to the vertical and radial relative fluid-to-solid displacements are obtained by substituting  $G_{2j}^{kl}$  for  $G_{1j}^{kl}$ . As a first verification of the formulas, we note that the expressions corresponding to perturbations of parameters  $\rho$ ,  $\lambda_U$  and  $G$  ( $\mathcal{A}_i^{\text{PSV}}$ ,  $\mathcal{F}_i^{\text{PSV}}$  and  $\mathcal{G}_i^{\text{PSV}}$ , respectively) are in perfect agreement with the Fréchet derivatives formulas computed for the density  $\rho$  and Lamé parameters  $\lambda$  and  $\mu$  in the elastic case (Dietrich et Kormendi, 1990).

### 4.3.3 Fréchet derivatives for relevant parameters

As mentioned above, the set of 7 parameters ( $\rho$ ,  $\rho_f$ ,  $\tilde{\rho}$ ,  $C$ ,  $M$ ,  $\lambda_U$  and  $G$ ) used in the perturbation analysis was primarily chosen to considerably simplify the derivation of expressions (4.28). In practice, and as with the Lamé parameters in the elastic case, it is more convenient to consider model parameters which are easier to measure or estimate. We introduce here a new set of 8 parameters, namely  $\rho_s$ ,  $\rho_f$ ,  $k_0$ ,  $\phi$ ,  $K_f$ ,  $K_s$ ,  $G_s$  and  $c_s$  which are more naturally related to the solid and fluid phases. Furthermore, these parameters are independent from each other in terms of their mechanical or hydrological meaning.

They are all real and frequency independent, contrary to  $\tilde{\rho}$ . *The Fréchet derivatives with respect to the fluid viscosity and to the permeability are proportional. We prefer focus on the permeability but the comments are similar for both parameters.*

To obtain the corresponding Fréchet derivatives from expressions (4.28), we construct the  $8 \times 7$  Jacobian matrix  $\mathbf{J}$  whose coefficients are formally defined by

$$J_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial p'_j}, \quad (4.29)$$

where  $p_i, i = 1..7$ , stands for one of the parameters  $\rho, \rho_f, \tilde{\rho}, C, M, \lambda_U$  or  $G$ , and where  $p'_j, j = 1..8$ , represents one of the parameters  $\rho_s, \rho_f, k_0, \phi, K_s, K_f, G_s$  or  $c_s$ . The elements of matrix  $\mathbf{J}$  are determined from equations (4.2) to (4.6).

The Fréchet derivatives with respect to the new set of parameters for the vertical component of the solid displacement  $U$  are then defined by

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathcal{A}}_i^{\text{PSV}} \\ \hat{\mathcal{B}}_i^{\text{PSV}} \\ \hat{\mathcal{C}}_i^{\text{PSV}} \\ \hat{\mathcal{D}}_i^{\text{PSV}} \\ \hat{\mathcal{E}}_i^{\text{PSV}} \\ \hat{\mathcal{F}}_i^{\text{PSV}} \\ \hat{\mathcal{G}}_i^{\text{PSV}} \\ \hat{\mathcal{H}}_i^{\text{PSV}} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_i^{\text{PSV}} \\ \mathcal{B}_i^{\text{PSV}} \\ \mathcal{C}_i^{\text{PSV}} \\ \mathcal{D}_i^{\text{PSV}} \\ \mathcal{E}_i^{\text{PSV}} \\ \mathcal{F}_i^{\text{PSV}} \\ \mathcal{G}_i^{\text{PSV}} \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

The combinations involved in equation (4.30) significantly complicate the expressions of the Fréchet derivatives corresponding to the new set of parameters. For sake of clarity and simplification, we introduce the following quantities

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{n_J - 4i \frac{\omega}{\omega_c}} \\ a &= (1 + c_s \phi) K_s + c_s (1 - \phi) K_f \\ b &= \phi^2 \{ 4(2 + 3c_s) G_s a^2 - 3(2 + 3c_s \phi)^2 K_s (1 + c) [K_s^2 - c_s K_f^2 + (c_s - 1) K_s K_f] \} \\ c &= \phi^2 [(2 + 3c_s \phi)^2 K_s (K_s - K_f)^2 - 4a^2 G_s] . \end{aligned} \quad (4.31)$$

With these parameters, the final expressions of the Fréchet derivatives  $\hat{\mathcal{A}}_1^{\text{PSV}}, \hat{\mathcal{B}}_1^{\text{PSV}}, \hat{\mathcal{C}}_1^{\text{PSV}}, \hat{\mathcal{D}}_1^{\text{PSV}}, \hat{\mathcal{E}}_1^{\text{PSV}}, \hat{\mathcal{F}}_1^{\text{PSV}}, \hat{\mathcal{G}}_1^{\text{PSV}}$  and  $\hat{\mathcal{H}}_1^{\text{PSV}}$  with respect to model parameters  $\rho_s, \rho_f, k_0, \phi, K_s, K_f$ ,

$G_s$  and  $c_s$  are

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{A}}_1^{\text{PSV}} &= (1 - \phi) \mathcal{A}_1^{\text{PSV}} \\
 \hat{\mathcal{B}}_1^{\text{PSV}} &= \phi \mathcal{A}_1^{\text{PSV}} + \mathcal{B}_1^{\text{PSV}} + \frac{2 + \Omega}{\Omega} F \mathcal{C}_1^{\text{PSV}} \\
 \hat{\mathcal{C}}_1^{\text{PSV}} &= -\frac{\left(i n_J + 2 \frac{\omega}{\omega_c}\right) \eta}{k_0^2 \Omega \omega} \mathcal{C}_1^{\text{PSV}} \\
 \hat{\mathcal{D}}_1^{\text{PSV}} &= \frac{1}{a^2 \phi^2 (2 + 3 c_s \phi)^2} \left\{ a^2 \phi^2 (\rho_s - \rho_f) (2 + 3 c_s \phi)^2 \mathcal{A}_1^{\text{PSV}} - 2 a^2 \phi^2 (2 + 3 c_s) G_s \mathcal{G}_1^{\text{PSV}} \right. \\
 &\quad \left. - (2 + 3 c_s \phi)^2 \left[ (1 + c_s \phi)^2 K_s + c_s (1 - 2 \phi - c_s \phi^2) K_f \right] K_s K_f \mathcal{E}_1^{\text{PSV}} \right. \\
 &\quad \left. - \phi^2 c_s (1 + c_s) (2 + 3 c_s \phi)^2 (K_s - K_f) K_s K_f \mathcal{D}_1^{\text{PSV}} + \frac{1}{3} b \mathcal{F}_1^{\text{PSV}} \right\} \\
 \hat{\mathcal{E}}_1^{\text{PSV}} &= \frac{1 - \phi}{a^2 \phi} \left\{ \phi c_s (1 + c_s) K_f^2 \mathcal{D}_1^{\text{PSV}} + c_s (1 + c_s \phi) K_f^2 \mathcal{E}_1^{\text{PSV}} \right. \\
 &\quad \left. + \phi \left[ (1 + c_s \phi) K_s^2 + c_s (c_s + \phi) K_f^2 + 2 c_s (1 - \phi) K_s K_f \right] \mathcal{F}_1^{\text{PSV}} \right\} \\
 \hat{\mathcal{F}}_1^{\text{PSV}} &= \frac{1}{a^2 \phi} \left\{ (1 + c_s \phi) K_s^2 \left[ \phi (1 + c_s) \mathcal{D}_1^{\text{PSV}} + (1 + c_s \phi) \mathcal{E}_1^{\text{PSV}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \phi (c_s + \phi) (1 + c_s \phi) - c_s (1 - \phi)^2 \right] K_s^2 \mathcal{F}_1^{\text{PSV}} \right\} \\
 \hat{\mathcal{G}}_1^{\text{PSV}} &= 2 \frac{1 - \phi}{2 + 3 c_s \phi} \left[ -\frac{2}{3} \mathcal{F}_1^{\text{PSV}} + \mathcal{G}_1^{\text{PSV}} \right] \\
 \hat{\mathcal{H}}_1^{\text{PSV}} &= \frac{1 - \phi}{a^2 \phi (2 + 3 c_s \phi)^2} \left\{ (2 + 3 c_s \phi)^2 K_s K_f \left[ \phi (K_s - K_f) \mathcal{D}_1^{\text{PSV}} - K_f \mathcal{E}_1^{\text{PSV}} \right] \right. \\
 &\quad \left. - c \mathcal{F}_1^{\text{PSV}} - 6 a^2 \phi^2 G_s \mathcal{G}_1^{\text{PSV}} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

We note that the Fréchet derivatives  $\hat{\mathcal{B}}_1^{\text{PSV}}$  and  $\hat{\mathcal{C}}_1^{\text{PSV}}$  with respect to fluid density  $\rho_f$  and permeability  $k_0$  are complex due to the role of these parameters in the attenuation and dispersion of seismic waves.

In addition, formulas (4.32) can be further simplified if source and receivers are located at the same depth  $z_0 = z_R = z_S$ . In this case, we can take advantage of the representation of the incident wave fields  $U$ ,  $V$ ,  $W$  and  $X$  in terms of the Green's functions (see equations 4.13), and use the reciprocity theorem :

$$G_{ij}^{kl}(z_R, \omega; z_S) = G_{kl}^{ij}(z_S, \omega; z_R) . \tag{4.33}$$

The number of Green's functions required to describe the wave propagation then reduces from 32 to 16. These simplifications are straightforward and are not developed here.

#### 4.3.4 SH case

We follow the same procedure as above to derive the Fréchet derivatives of the solid displacement  $T$  and relative fluid-to-solid displacement  $Y$  in the  $SH$  case. We denote by

$\mathcal{A}_i^{\text{SH}}$ ,  $\mathcal{B}_i^{\text{SH}}$ ,  $\mathcal{C}_i^{\text{SH}}$ ,  $\mathcal{D}_i^{\text{SH}}$ ,  $\mathcal{E}_i^{\text{SH}}$ ,  $\mathcal{F}_i^{\text{SH}}$  and  $\mathcal{G}_i^{\text{SH}}$ , respectively, the Fréchet derivatives with respect to model parameters  $\rho$ ,  $\rho_f$ ,  $\tilde{\rho}$ ,  $M$ ,  $K_U$ ,  $G$  and  $C$ , where subscript  $i = 1$  refers to the solid displacement  $T$  and subscript  $i = 2$  refers to the relative fluid-to-solid displacement  $Y$ . We also introduce the notations  $\hat{\mathcal{A}}_i^{\text{SH}}$ ,  $\hat{\mathcal{B}}_i^{\text{SH}}$ ,  $\hat{\mathcal{C}}_i^{\text{SH}}$ ,  $\hat{\mathcal{D}}_i^{\text{SH}}$ ,  $\hat{\mathcal{E}}_i^{\text{SH}}$ ,  $\hat{\mathcal{F}}_i^{\text{SH}}$ ,  $\hat{\mathcal{G}}_i^{\text{SH}}$  and  $\hat{\mathcal{H}}_i^{\text{SH}}$  for the Fréchet derivatives relative to our alternative set of model parameters  $\rho_s$ ,  $\rho_f$ ,  $k_0$ ,  $\phi$ ,  $K_s$ ,  $K_f$ ,  $G_s$  and  $c_s$ . The perturbation analysis leads to the following expressions of the Fréchet derivatives of the transverse solid displacement  $T$  :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_i^{\text{SH}} &= -\omega^2 T G_{1t}^{1t} \\
 \mathcal{B}_i^{\text{SH}} &= -\omega^2 [Y G_{1t}^{1t} + T G_{1t}^{2t}] \\
 \mathcal{C}_i^{\text{SH}} &= -\omega^2 Y G_{1t}^{2t} \\
 \mathcal{D}_i^{\text{SH}} &= 0 \\
 \mathcal{E}_i^{\text{SH}} &= 0 \\
 \mathcal{F}_i^{\text{SH}} &= 0 \\
 \mathcal{G}_i^{\text{SH}} &= \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial G_{1t}^{1t}}{\partial z} + \omega^2 p^2 T G_{1t}^{1t}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

We note, as before, that the displacements  $T$  and  $Y$  can be expressed in terms of the Green's functions  $G_{it}^{jt}$ , where subscripts  $i = 1$  and  $j = 1$  relate to solid displacement and force, whereas subscripts  $i = 2$  and  $j = 2$  relate to relative fluid-to-solid displacement and force. Subscript  $t$  stands for the tangential displacement or force. The transformation of these expressions with the Jacobian matrix  $\mathbf{J}$  defined in equation (4.29) finally yields :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{A}}_i^{\text{SH}} &= (1 - \phi) A_{sh1} \\
 \hat{\mathcal{B}}_i^{\text{SH}} &= \phi A_{sh1} + B_{sh1} + \frac{2 + \Omega}{\Omega} F C_{sh1} \\
 \hat{\mathcal{C}}_i^{\text{SH}} &= -\frac{(in_J + 2\frac{\omega}{w_c}) \eta}{k_0^2 \Omega \omega} C_{sh1} \\
 \hat{\mathcal{D}}_i^{\text{SH}} &= (\rho_s - \rho_f) A_{sh1} - 2 G_s \frac{2 + 3 c_s}{(2 + 3 c_s \phi)^2} G_{sh1} \\
 \hat{\mathcal{E}}_i^{\text{SH}} &= 0 \\
 \hat{\mathcal{F}}_i^{\text{SH}} &= 0 \\
 \hat{\mathcal{G}}_i^{\text{SH}} &= 2 \frac{1 - \phi}{2 + 3 c_s \phi} G_{sh1} \\
 \hat{\mathcal{H}}_i^{\text{SH}} &= -6 G_s \phi \frac{1 - \phi}{(2 + 3 c_s \phi)^2} G_{sh1}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

We note that the Fréchet derivatives with respect to  $K_s$  and  $K_f$  are zero since these parameters have no influence on shear waves.

## 4.4 Numerical simulations and accuracy tests

### 4.4.1 Fréchet derivatives *vs* discrete perturbations

As mentioned in the introduction, the Green's functions for layered media are computed with the Generalized Reflection and Transmission Matrix Method of Kennett et Kerry (1979) which yields the plane-wave response in the frequency–ray parameter (or horizontal wavenumber) domain. In our numerical applications, the Fréchet derivatives are first calculated in the frequency–wavenumber domain before being transformed into the time–distance domain with the discrete wavenumber integration method (Bouchon, 1981).

In order to test our analytical formulations and assess their limitations, we compare the differential seismograms computed with the first-order Fréchet derivative approach with the seismograms obtained by introducing discrete perturbations in the medium properties. Thus, considering for instance the vertical component of the solid displacement in the  $P - SV$  case, the partial derivative  $\partial U / \partial p_j$  with respect to parameter  $p_j$  ( $j = 1..8$ , according to the parameter set considered) can be approximated by the following finite difference expression :

$$\frac{\partial U(z_R, \omega; z_S)}{\partial p_j} \simeq \frac{U^{p_j + \Delta p_j}(z_R, \omega; z_S) - U^{p_j}(z_R, \omega; z_S)}{\Delta p_j}, \quad (4.36)$$

where  $\Delta p_j$  represents a small perturbation of parameter  $p_j$ .

The similarity between the seismograms computed with the two approaches indicated in the left- and right-hand sides of equation (4.36) is evaluated from the correlation coefficients between the traces.

### 4.4.2 Uniform medium

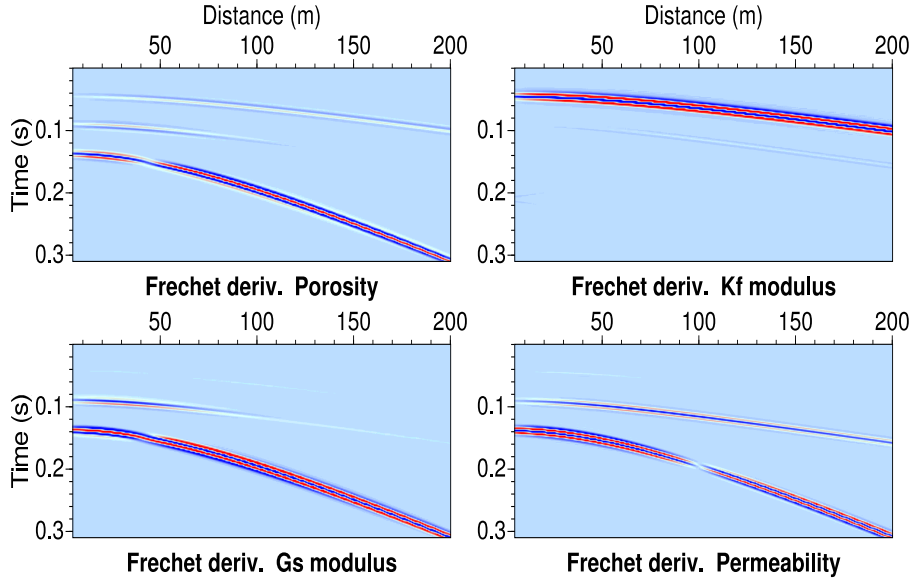
We first consider the simple case of small perturbations  $\delta\rho_s$ ,  $\delta\rho_f$ ,  $\delta k_0$ ,  $\delta\phi$ ,  $\delta K_s$ ,  $\delta K_f$ ,  $\delta G_s$  and  $\delta c_s$  within a thin slab embedded in an infinite uniform medium. The slab thickness is of the order of one twentieth of the dominant wavelength of the  $P$ -waves (i.e., 1 m). The amplitude of the relative perturbations  $\Delta p_j / p_j$  is 10 % for each of the parameters considered. *The seismic response of this thin slab is the reference for comparison with the Fréchet derivatives seismograms.* Source and receivers are located at the same depth, 50 m above the model perturbation. The parameters of the uniform model are listed in table 1.

The simulations shown in figure 4.1 include  $P_{fast}$ -,  $P_{slow}$ - and  $S$ -waves whose computed velocities are respectively equal to 2250, 130 and 750 m/s at a frequency of 85 Hz. The slow  $P$ -waves are not visible, but three reflected waves (compressional  $PP$ , converted  $PS$  and  $SP$ , and shear  $SS$ ) are easily identified in the four sections displayed in figure 4.1. It is seen that a small perturbation of the fluid modulus  $K_f$  has no influence on shear

**Table 4.1:** Model parameters of the infinite medium used for the numerical tests of the Fréchet derivatives.

$\phi$ ( )	$k_0$ (m <sup>2</sup> )	$\rho_f$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_s$ (kg/m <sup>3</sup> )	$K_s$ (GPa)	$G_s$ (GPa)	$K_f$ (GPa)	$c_s$ ( )
0.20	10 <sup>-12</sup>	1000	2700	35	25	2.2	50

waves. The same behavior is observed for the solid modulus  $K_s$  (not shown). On the contrary, slight changes in the other parameters mainly generate  $SS$  reflections, as noted in particular for the porosity  $\phi$ , mineral shear modulus  $G_s$  and permeability  $k_0$  in figure 4.1. We also observed that the differential seismograms are very similar for the following pairs of perturbations : *i*) consolidation parameter and porosity ; *ii*) fluid and solid moduli ; *iii*) fluid and solid densities. In addition, we found that the correlation coefficients between the Fréchet derivative and discrete perturbation seismograms are greater than 99 % for most model parameters at all source-receiver offsets. The only exception concerns the Fréchet derivative with respect to the permeability which shows correlation coefficients between 60 and 95 % in the  $P-SV$  case depending on the offset . However, this operator appears more accurate in the  $SH$  case. By and large, the tests performed in a uniform medium validate our analytical expressions derived in sections III.C and III.D.



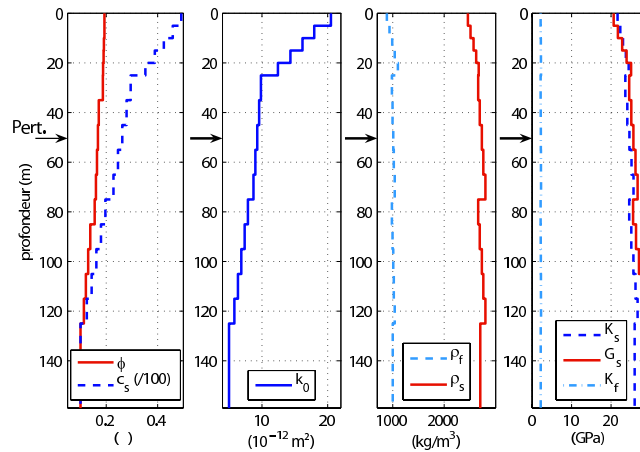
**Figure 4.1:** Seismic sections corresponding to the first-order perturbation of the vertical displacement with respect to porosity  $\phi$ , fluid modulus  $K_f$ , mineral shear modulus  $G_s$  and permeability  $k_0$  in the uniform and infinite medium described in table 1. The seismic excitation is a vertical point force.

We further check the accuracy and stability of the first-order sensitivity operators by modifying the amplitude of the discrete perturbations, with the following results : *i*) the Fréchet derivatives with respect to parameters that only influence  $P$ -waves are



more accurate than the Fréchet derivatives with respect to parameters that influence both  $P$ - and  $S$ -waves. *ii)* Strong perturbations of the solid and fluid moduli  $K_s$  and  $K_f$  do not produce any distortion of the waveforms, but merely result in a global increase of the amplitudes of the discrete perturbation seismograms. *iii)* For strong amplitude perturbations, the Fréchet derivatives are more stable at near offsets (i.e., for small angles of incidence) than at large offsets. We interpret this observation as being due to the nonlinearity inherent to large offsets where the wave fields interact more strongly with the subsurface structure. However, as an exception to this rule, the Fréchet derivatives with respect to permeability appear more stable at large source-receiver offsets. This may be explained by the fact that a perturbation of the permeability mainly changes the wave attenuation and dispersion and therefore has a stronger influence for longer travel paths. *The increase of the correlation coefficients with increasing  $k_0$ , i.e., with decreasing the quality factor, confirms this fact.* *iv)* For strong perturbations, the accuracy of the Fréchet derivatives deteriorates for specific offsets corresponding to critical angles. This reduced accuracy manifests itself by distortions of the relative amplitudes of  $P$ - and  $S$ -waves rather than by waveform changes. *v)* When checked against discrete perturbations of positive and negative amplitude of the same magnitude, the first-order approximations do not show exactly the same accuracy. In general, the Fréchet derivative seismograms obtained for positive perturbations display a better accuracy. *vi)* As a general rule, the first-order approximations appear remarkably accurate for amplitude perturbations up to 20 % in absolute value.

We now consider the robustness of the Fréchet derivative seismograms with respect to

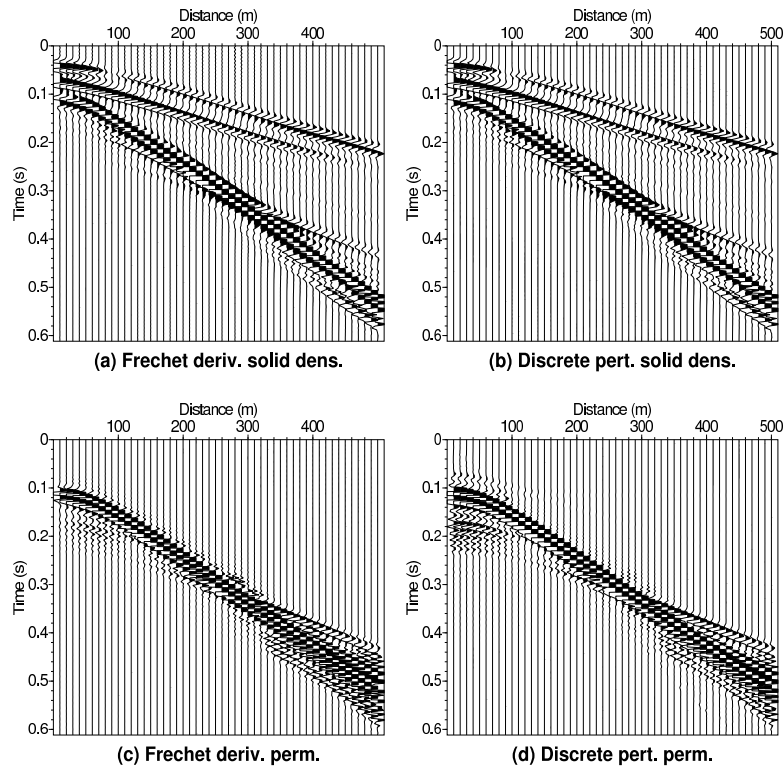


**Figure 4.2:** 16-layer model used for the numerical tests of the Fréchet derivative formulation in a stratified medium. The figure shows the distributions of the eight model parameters as a function of depth.

the thickness of the perturbed layer. In our uniform model, the wavelengths  $\lambda_P$  and  $\lambda_S$  corresponding to  $P$ - and  $S$ -waves are respectively equal to 26 m and 9 m at the dominant frequency of the Ricker wavelet used in the computation. Our computations show that

the Fréchet derivative seismograms are very well correlated with the discrete perturbation seismograms until the thickness of the perturbed layer reaches about 20% of the dominant wavelength  $\lambda_P$  (that is,  $\simeq 5$  m) for parameters  $K_s$  and  $K_f$ , and 20% of the dominant wavelength  $\lambda_S$  (that is,  $\simeq 2$  m) for all other parameters that influence both  $P$ - and  $S$ -waves. Thus, we observe that the Fréchet derivatives with respect to  $K_s$  and  $K_f$  are more robust than the other expressions with respect to departures from the "small and localized perturbation" assumption of the Born approximation.

### 4.4.3 Complex model



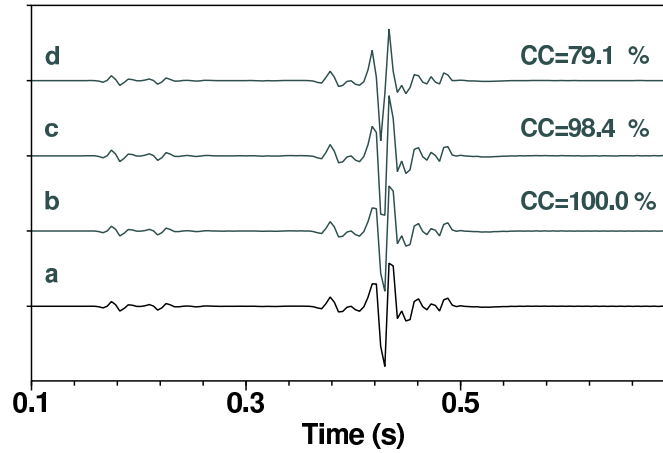
**Figure 4.3:** (a) and (b) Seismic sections obtained with the Fréchet derivatives and with the discrete perturbation methods for a perturbation of the solid density  $\rho_s$  at  $z = 50$  m in the 16-layer model depicted in figure 4.2. The seismograms represent the vertical displacement generated by a vertical force ( $P-SV$  wave system). (c) and (d) Same for a perturbation of the permeability  $k_0$ . In this case, the seismograms represent the horizontal transverse displacement generated by a horizontal transverse force ( $SH$  wave system).

We used the 16-layer model shown in figure 4.2 to numerically check the stability and accuracy of the Fréchet derivative formulas in a more complex structure. In this model, the perturbed layer is at a depth of 50 m, source and receivers being located near the surface. Figure 4.3 presents the seismic sections obtained with the Fréchet derivative and discrete perturbation methods for slight changes of the solid density  $\rho_s$  and permeability  $k_0$ . On the whole, the comparison of the waveforms obtained with both methods is very

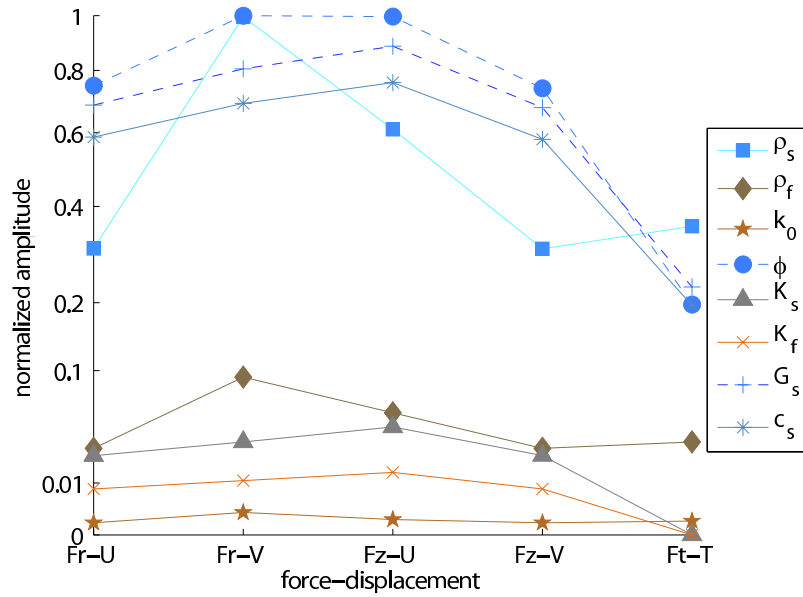
satisfactory in spite of some differences observed at small offsets for the perturbation of the permeability.

Figure 4.4 shows that the Fréchet derivative seismograms are remarkably accurate as long as the perturbation amplitude remains small. In this case, the maximum acceptable perturbation amplitude is approximatively 10 % of the model parameter value. When the perturbation amplitude is increased beyond this limit, the  $P$ –waveforms remain practically unchanged whereas the  $S$ –waveforms are distorted. In all cases, no variations in travel times are observed.

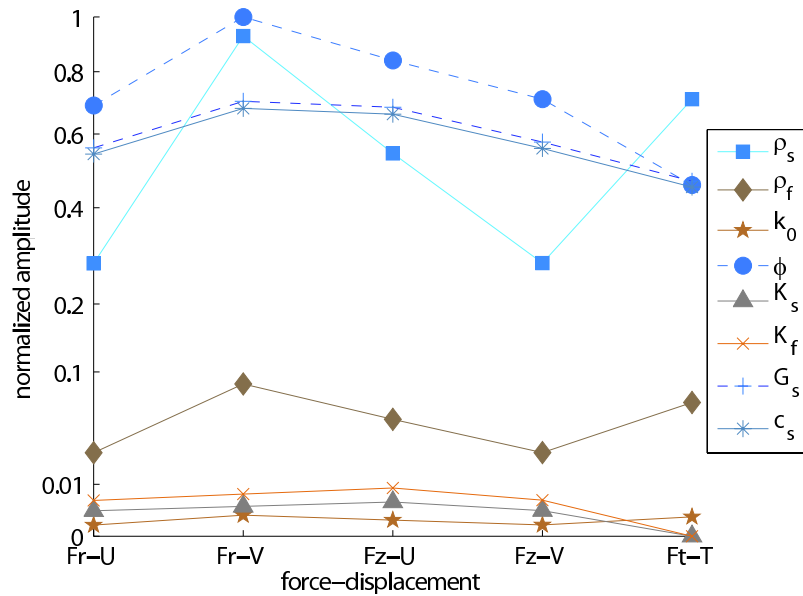
We also checked the behavior of the Fréchet derivative operators relative to the thickness of the perturbation layer, or equivalently, relative to the central frequency of the wavelet used in the computations. As for the uniform medium investigated before, we note that the first-order approximations remain very accurate as long as the layer thickness layer is lower than  $\lambda_P/5$  or  $\lambda_S/5$  depending on the model parameter considered.



**Figure 4.4:** Detailed comparison of individual seismic traces obtained with the Fréchet derivatives and with the discrete perturbation methods for various perturbation amplitudes. The model used for the computations is the 16-layer model presented in figure 4.2. The seismic source is a vertical point force. It shows the perturbation of the vertical displacement with respect to the shear modulus  $G_s$  for a source-receiver offset of 300 m. The seismograms labeled a correspond to the Fréchet derivative formulation. The traces labeled b, c and d are respectively associated with discrete perturbations of the model parameters with amplitudes of 1 %, 10 % and 50 %. The similarity between the Fréchet derivative and discrete perturbation seismograms is quantified by their correlation coefficient which is indicated above the traces.



**Figure 4.5:** Normalized maximum amplitude of the Fréchet derivative seismograms for all solid force and displacement pairs.  $F_z$ ,  $F_r$  and  $F_t$  respectively denote the vertical, horizontal radial and horizontal tangential components of the forces acting on an average volume of porous medium.  $U$ ,  $V$  and  $T$  stand for the vertical, horizontal radial and horizontal tangential components of the solid displacement. The model parameters are those given in table 1 except for the consolidation parameter  $c_s$  which is equal to 20. The amplitude scale is non linear for sake of readability.



**Figure 4.6:** Same as Figure 4.5 with consolidation parameter  $c_s$  equal to 100.

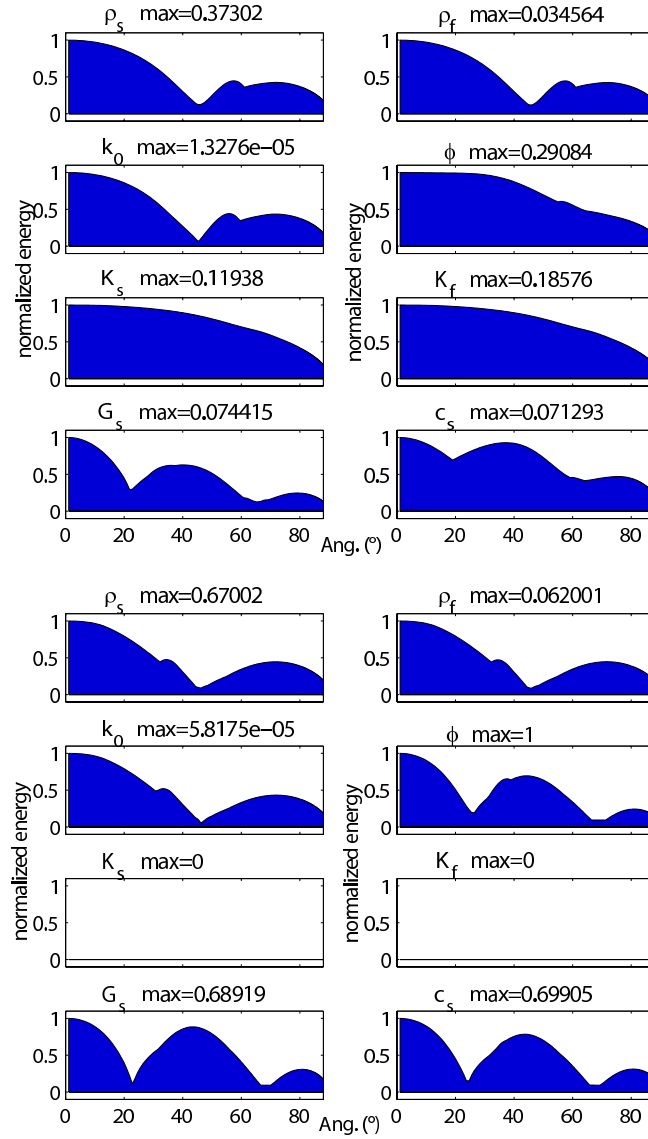
## 4.5 Sensitivity study

### 4.5.1 Relative influence of the model parameters

In this section, we assess the relative influence of small modifications of the model parameters on the different components of the seismic wave field. For this, we determine the maximum amplitude of the seismograms computed with the discrete perturbation method for all pairs of vertical and horizontal forces and displacements. These computations are done with the model parameters of table 1, aside from the consolidation parameter  $c_s$  which is given a value of 20 in figure 4.5 and 100 in figure 4.6. Perturbation depth, source and receiver locations and maximum offset are identical to those used in section IV.B. The amplitudes thus obtained are multiplied by the parameter variation ( $\Delta p$ ) to obtain the displacement change  $\Delta U$  of equation (4.36), and normalized with respect to the maximum value found. The same quantities were computed with the Fréchet derivative approach to check the agreement between the two computation techniques. Figures 4.5 and 4.6 show that the seismograms are essentially sensitive to porosity  $\phi$  in the uniform medium considered. The seismograms are also strongly influenced by perturbations of the consolidation parameter  $c_s$ , mineral density  $\rho_s$  and shear modulus  $G_s$ . On the other hand, changes in fluid density  $\rho_f$ , mineral modulus  $K_s$ , fluid modulus  $K_f$  and permeability  $k_0$  have only a weak influence on the wave amplitudes. We also note that the influence of parameters  $c_s$  and  $G_s$  on the one hand, and  $\rho_s$  and  $\rho_f$  on the other hand, are very similar for the various force-displacement pairs.

For the model with the lowest value of the consolidation parameter (corresponding to the most consolidated material, figure 4.5), the solid modulus  $K_s$  has a stronger influence on the seismograms than the fluid modulus  $K_f$ . On the contrary, for an unconsolidated medium (figure 4.6), the seismograms are mainly influenced by the fluid properties. With the model parameters used in this study, we find that the transition between these two regimes occurs for a consolidation parameter of 35. We also verified, as suggested by our observations in section IV.B, that the porosity parameter shows the same behavior : the seismogram amplitudes in a high porosity medium depend more strongly on the fluid modulus than on the solid modulus, and vice-versa for a medium with low porosity. As a consequence (and confirmation of field observations), the  $P$ -waves are strongly influenced by the fluid properties when they propagate in a fluid-saturated and poorly consolidated medium with high porosity. This makes it possible to determine the fluid characteristics from the seismic waveforms if these favorable conditions are met. Conversely, the estimation of the fluid characteristics will be more difficult in consolidated or unsaturated or low porosity media. Another consequence of the results shown in figures 4.5 and 4.6 is that  $\phi$  and  $c_s$  are the most attractive parameters to invert for in an inversion procedure, assuming that  $\rho_s$  and  $G_s$  can be estimated independently.

### 4.5.2 Amplitude of the perturbation seismograms versus angle of incidence



**Figure 4.7:** Energy of plane waves reflected from perturbations in  $\rho_s$ ,  $\rho_f$ ,  $k_0$ ,  $\phi$ ,  $K_s$ ,  $K_f$ ,  $G_s$  and  $c_s$ , as a function of incidence angle. The eight upper panels and eight lower panels respectively correspond to PP and SS reflections. The curves are normalized with respect to the maximum value indicated above each panel.

The previous figures already stressed the interdependence (or coupling) of some model parameters. Parameter coupling means that small perturbations of two or more parameters result in similar modifications of the seismic response. An obvious consequence of parameter coupling is that it becomes difficult or even impossible to reliably estimate the model parameters in an inversion procedure (Tarantola, 1986).

To look into this problem, we computed the plane wave responses corresponding to

10% perturbations of the model properties in the infinite medium described in table 1. Figure 4.7 shows the reflected energy for the eight model parameters as a function of angle of incidence at the perturbed layer, both for the  $PP$  and  $SS$  reflections. The smooth aspect of the curves is due to the intrinsic attenuation of the seismic waves propagating in the porous medium. The peaks and troughs of the curves are explained by the strong variations of the reflection and transmission coefficients, as shown for instance by de la Cruz et al. (1992). Some of these rapid variations are seen on the seismograms of figure 4.1 which were computed with the same model and source-receiver configuration.

The magnitudes of the seismic responses shown in figure 4.7 are consistent with the study presented in section V.A.  $SS$  reflections are about twice as large as  $PP$  reflections for perturbations of the solid and fluid densities. For  $SS$  reflections, the maximum value is reached for a perturbation in porosity  $\phi$ , whereas  $G_s$ ,  $c_s$  and  $\rho_s$  produce perturbations of the same magnitude. For  $PP$  reflections, the most influential parameters are the solid density  $\rho_s$  and porosity  $\phi$ .

We also see in figure 4.7 that the radiation patterns associated with perturbations in  $\rho_s$ ,  $\rho_f$  and  $k_0$  on the one hand, and  $K_s$  and  $K_f$  on the other hand are exactly the same for the  $PP$  reflections. The same resemblance is observed for the  $SS$  reflections for the  $\rho_s$ ,  $\rho_f$  and  $k_0$  group of parameters, and for the  $G_s$ ,  $\phi$  and  $c_s$  group of parameters. We note in particular that permeability  $k_0$  and densities  $\rho_s$  and  $\rho_f$  behave similarly despite their different roles in the constitutive equations. In all cases, the backscattered energy is maximum at normal incidence because of the shorter wave path and corresponding minimal attenuation.

## 4.6 Conclusions

We derived the Fréchet derivatives of the seismic response of a depth-dependent porous medium. The Fréchet derivatives are analytically expressed in terms of the Green's functions of the propagation medium through a perturbation analysis of the poro-elastic wave equations expressed in the plane wave domain. Started with a primary set of seven model parameters chosen because of their linear relationship with the wave equations, the derivation was carried on with a secondary set of eight model parameters more convenient to use as physical parameters of the problem. The eight model parameters considered in our analysis are related to the fluid properties (density, bulk modulus), to the mineral properties (density, bulk modulus, shear modulus) and to the arrangement of the porous material (porosity, permeability and consolidation parameter). In the  $P - SV$  case, we derived Fréchet derivatives for 3 different forces (horizontal and vertical point forces and explosive point sources), 4 displacement components and 8 model parameters. In the  $SH$  case, we obtained 12 expressions for 1 horizontal point force, 2 displacement components and 6 model parameters leading to non-zero Fréchet derivatives.

We checked the accuracy of these sensitivity operators in the time-distance domain by comparing the waveforms computed from the first-order expressions with seismograms obtained by introducing discrete perturbations in the medium properties. *We present the results for tests carried out both in a homogeneous and in a more complex earth model for oriented point forces.* By and large, we found that our analytical expressions of the Fréchet derivatives are remarkably accurate as long as the Born approximation assumptions are satisfied, that is, as long as the perturbations of the model parameters are weak and localized. However, as in other studies relying on the Born approximation, we showed that the first-order operators are robust enough to model parameter perturbations up to 20 % and layer thicknesses up to one fifth of the dominant wavelength. Furthermore, our formulation appears to be stable at all source-receiver offsets.

Due to their analytical formulation, the sensitivity operators derived in this paper will be especially useful in full waveform inversion algorithms implemented with gradients techniques. As a first step toward such an application, we evaluated the sensitivity of the seismic response of a poro-elastic medium with respect to each model parameter. We showed that the porosity and consolidation parameter are the most attractive parameters to invert for, whereas the permeability appears to be the most difficult parameter to determine. Wave fields are more sensitive to the fluid bulk modulus than to the mineral bulk modulus, or inversely, according to porosity and consolidation parameter values. Multi-parameter inversion of backscattered energy looks challenging because of the strong coupling of several model parameters in a wide range of angles of incidence. Finally, this sensitivity study should prove useful for the interpretation of time-lapse monitoring surveys and for checking solutions (yet to come) accounting for 3D heterogeneities in the propagation medium.



## Deuxième partie

# Inversion d'ondes sismiques en milieu poreux



# Chapitre 5

## Introduction et formulation du problème inverse

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>117</b>
<b>5.2</b>	<b>Algorithmes d'inversion . . . . .</b>	<b>122</b>
<b>5.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>132</b>

---

Ce chapitre a pour but de présenter les différentes méthodes existantes pour imager la subsurface et plus particulièrement celles utilisables pour extraire l'information sur les paramètres poro-élastiques. L'objectif est d'obtenir les variations fines des paramètres en utilisant la réflectivité des ondes.

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'état de l'art sur les différentes techniques d'imagerie, en termes de vitesses élastiques puis de paramètres poro-élastiques. La deuxième section présente l'algorithme d'inversion de formes d'ondes complètes utilisé pour cette étude.

### 5.1 Introduction

#### 5.1.1 Comment imager la sub-surface ?

Deux principales classes de méthodes existent pour quantifier les paramètres du milieu à partir de la sismique en réflexion. Une classe de méthodes est la migration quantitative (Claerbout, 1971), beaucoup utilisée par l'industrie pétrolière. Elle consiste à replacer les ondes réfléchies sur une section sismique à leur emplacement réel, par des procédés numériques (migration de Kirchhoff ou par équation d'onde par exemple). Les réflecteurs sont donc spatialement repositionnés dans un milieu. Il convient ensuite d'estimer les

contrastes de vitesse correspondants. Ces méthodes, efficaces en 3 voire 4 dimensions sont surtout utilisées pour obtenir les vitesses élastiques.

La seconde classe d'imagerie quantitative consiste à effectuer une inversion, ce qui consiste à chercher un modèle qui minimise l'écart entre les données mesurées et celles calculées numériquement. Le problème direct, c'est-à-dire le calcul des données à partir des paramètres du modèle doit être correctement résolu. Il est ici calculé par la méthode de réflectivité de Kennett (1983) couplée avec l'intégration en nombres d'ondes discrets de Bouchon (1981) (cf. chap. 2).

### Différentes méthodes d'inversion

La relation générale entre les données  $\mathbf{d}$  et le modèle  $\mathbf{m}$  peut s'écrire à l'aide d'une fonction non linéaire  $g$  telle que :

$$\mathbf{d} = g(\mathbf{m}) \quad (5.1)$$

La non linéarité et la non bijectivité de la fonction  $g$  fait que  $g^{-1}$  n'est pas directement calculable (ou n'existe pas), alors que le problème direct l'est. Il faut donc estimer le modèle correspondant le mieux aux données observées  $\mathbf{d}_{obs}$ , c'est-à-dire qui minimise une fonction coût. Pour cela, trois grande classes de modèles existent :

- Les méthodes globales consistent à explorer tout l'espace des données systématiquement ou aléatoirement (Monte-Carlo) et à choisir les modèles présentant la plus faible fonction coût (Snieder et al., 1989). Ces méthodes requièrent un temps de calcul très élevé, mais évitent les problèmes de minima locaux de la fonction coût. Elles sont adaptées quand le calcul du problème direct est très rapide et le nombre de paramètres à déterminer faible. Les travaux de De Barros et al. (2007), données en annexe C, sont un exemple d'utilisation d'inversion de courbes de dispersion d'ondes de surface par une méthode de Monte-Carlo pour l'imagerie d'une structure volcanique profonde.
- Les méthodes semi-globales explorent grossièrement tout l'espace des modèles en affinant le recherche autour des minima. C'est le cas des algorithmes de voisinage (Sambridge, 1999). Bien que plus efficaces que les méthodes de Monte-Carlo, elles nécessitent également un temps de calcul très élevé. Une autre possibilité est l'algorithme de recuit simulé, qui explore l'espace des modèles de manière aléatoire en autorisant des augmentations de la fonction coût pour sortir de minimum locaux (Courboux et al., 1996; Amand et Virieux, 1995).
- Les méthodes locales sont basées sur l'approche de Tarantola et Valette (1982a). Cette inversion repose sur l'analyse locale de la fonction coût et notamment de ses

dérivées (gradient, Hessien), ce qui donne la direction de descente vers un minimum. Ce sont ces méthodes qui seront développées ici.

### Méthodes locales d'inversion

Depuis les travaux de Tarantola et Valette (1982a) et Tarantola (1987), de nombreux auteurs ont utilisé le formalisme de l'inversion linéarisée au sens des moindres carrés.

La migration rai+Born (Lambaré et al., 1992, 2003) consiste en un calcul des sismogrammes synthétiques par un algorithme de tracé de rai et une inversion au sens des moindres carrés. Cette méthode a ensuite été étendue à l'estimation du facteur de qualité (Ribodetti et Virieux, 1998).

L'inversion des formes d'ondes dans le domaine temps-distance a été réalisée par Gauthier et al. (1986) dans le cas acoustique puis dans le cas élastiques par Mora (1988) ou Pica et al. (1990). Kormendi et Dietrich (1991) ont effectué une inversion en termes de vitesses élastiques et densité dans le domaine temps intercepté/paramètre de rai ( $\tau, p$ ) en milieu stratifié plan. De nombreux auteurs ont inversé les formes d'ondes acoustiques dans le domaine fréquentiel (Pratt et al., 1996; Sirgue, 2003; Operto et al., 2004) pour des milieux à une puis à deux dimensions. Gélis (2005) s'est intéressée à l'inversion des paramètres élastiques dans ce domaine. L'intérêt d'une inversion dans le domaine fréquentiel réside dans la possibilité de n'inverser les données que pour un nombre limité de fréquences. Cela permet d'éviter le traitement d'une information sismique redondante et donc de minimiser le temps de calcul.

#### 5.1.2 Quelle information transportent les ondes sismiques ?

Claerbout (1985) et Jannane et al. (1989) ont montré que les ondes réfléchies contiennent de l'information sur les courtes et grandes longueurs d'ondes du modèle, avec une lacune sur les longueurs d'ondes moyennes.

Les grandes longueurs d'ondes du modèle, qui caractérisent la tendance générale du milieu, sont liées aux vitesses des ondes et donc aux temps d'arrivées. La tomographie des temps d'arrivées est le meilleur moyen d'obtenir ces grandes longueurs d'ondes. L'analyse des ondes de surface, qui moyennent l'information sur une grande profondeur, est un autre moyen d'obtenir les grandes longueurs d'ondes du modèle. Un exemple d'utilisation des ondes de surface est donné dans l'article en Annexes C (De Barros et al., 2007), où les vitesses de phase de ces ondes sont inversées en un modèle lisse de croûte sous le volcan Popocatepetl (Mexique).

Au contraire, les variations locales des paramètres du modèle vont influencer la réflectivité du milieu, ce qui se traduit sur le sismogramme par des ondes réfléchies et des

variations d'amplitude et de forme d'onde. Les hautes fréquences du modèles sont donc liées aux impédances  $\rho V$  dans le cas élastique. Les algorithmes de migration apportent surtout des informations sur les hautes fréquences du milieu. Mora (1989) a ainsi montré qu'une inversion de formes d'ondes complètes est équivalente à une tomographie suivie d'une migration.

Cependant, l'absence d'information sur les longueurs d'ondes moyennes fait qu'il est très difficile d'inverser à la fois les grandes et les courtes longueurs d'ondes. L'intérêt d'une inversion de formes d'ondes complètes réside dans la possibilité de déterminer la réflectivité et les variations locales du modèle. Par conséquent, il est souhaitable de déterminer au préalable un modèle de départ lisse pour l'inversion, et de ne chercher à résoudre que les courtes longueurs d'ondes.

### 5.1.3 Quantifier les paramètres poro-élastiques par la sismique réflexion

Relier les attributs sismiques aux propriétés des roches est un enjeu majeur pour la caractérisation de réservoirs pétroliers, hydrologiques ou de stockage. De nombreuses études ont conduit à l'émergence de techniques pour estimer la porosité et les caractéristiques du fluide à partir de données sismiques. En général, l'inversion se fait en deux étapes : tout d'abord les impédances ou les vitesses sismiques sont déterminées par des méthodes classiques, puis des analyses statistiques et les relations de la mécanique des roches sont utilisées pour estimer les paramètres du milieu poreux. Cette dernière étape est mal résolue et peut conduire à plusieurs solutions acceptables. Il est donc nécessaire d'introduire des connaissances extérieures (lithologie, type de fluide, ...).

Les relations de Gassmann (1951) ou d'autres relations plus ou moins empiriques (Mavko et al., 1998) permettent de relier les vitesses sismiques aux paramètres mécaniques du fluide et de la roche. De nombreux auteurs ont cherché les vitesses sismiques, puis ont déterminé les paramètres poro-élastiques à l'aide de connaissances lithologiques. Par exemple, Domenico (1984) utilise des relations simples pour déduire la porosité des vitesses sismiques. Berryman et al. (2002) cherchent des combinaisons des vitesses des ondes  $S$  et  $P$  permettant d'isoler la saturation en fluide.

Certaines méthodes sont basées sur des régressions statistiques pour estimer une répartition possible des paramètres recherchés à partir de données de forages et sismiques. Ainsi, Doyen (1988) reconstitue la porosité dans un volume à partir de données de forages irrégulièrement réparties et de temps d'arrivées isorépartis sur une grille. L'utilisation de l'intercorrélacion spatiale pour effectuer la régression permet de retrouver la porosité dans des milieux très hétérogènes ou anisotropes.

Beaucoup d'auteurs utilisent les méthodes de Monte Carlo (Mosegaard et Tarantola, 2002, par exemple) pour déterminer les densités de probabilité *a posteriori* des paramètres recherchés à partir de la densité de probabilité *a priori* (données de forages,...) et de données géophysiques (cf. section 5.2.6). Cette approche est dite Bayésienne (T. Bayes, 1702-1761) : la densité de probabilité *a posteriori* est obtenue par la multiplication de la densité *a priori* par une fonction de vraisemblance, obtenue ici par des algorithmes de Monte Carlo associés à des chaînes de Markov.

- Bosch (1999) utilise la connaissance de certains paramètres pour estimer une densité *a priori*, et l'inversion jointe de données magnétiques et gravimétriques par un algorithme de Monte Carlo complète l'estimation de la densité de probabilité en terme de densité, lithologie et susceptibilité magnétique.
- Spikes et al. (2006) utilisent une inversion en 6 étapes : ils partent de l'information d'un forage pour contraindre les paramètres autres que la teneur en argile, la porosité et la teneur en fluide. Ce triplet de paramètres est perturbé aléatoirement et sert au calcul des propriétés élastiques. Enfin, la corrélation maximale entre les sismogrammes synthétiques élastiques et les données mesurées permet de déterminer le triplet le plus adapté et sa densité de probabilité.
- Bachrach (2006) inverse les impédances sismiques (Monte Carlo) en porosité et teneur en fluide pour obtenir une densité de probabilité de ces paramètres.
- Mukerji et al. (2001) et Gunning et Glinsky (2007) estime la porosité à partir de l'inversion par Monte Carlo de l'amplitude de la réflectivité (AVO) à court et large offset.

Toutes ces méthodes passent par la détermination des vitesses ou des réflectivités élastiques. Elles n'utilisent donc pas au mieux les théories poro-élastique, qui, en particulier, relie l'atténuation aux propriétés physiques du milieu. De plus, elles nécessitent des connaissances initiales très fortes sur le milieu, sans quoi le problème ne peut être résolu. Enfin, l'utilisation des algorithmes de Monte Carlo nécessite un temps de calcul très long, ce qui limite considérablement le nombre de paramètres estimables. Cependant, la densité de probabilité quantifie l'incertitude des résultats des études statistiques, ce qui présente l'avantage d'être non ambigu.

A ma connaissance, seul Bosch (2004) a effectué une inversion de sismogrammes complets par une méthode locale de Newton pour estimer la porosité. Il inverse conjointement les amplitudes sismiques en impédances élastiques et les impédances élastiques en porosité. Il compare l'inversion jointe avec l'inversion en deux étapes et trouve de meilleurs résultats pour l'inversion jointe. Cependant, les paramètres poreux sont ici aussi déterminés à partir des vitesses sismiques.

### **Inversion à partir de données de forages**

Une classe de méthode pour déterminer les paramètres poro-élastiques est basée sur la sismicité induite par des injections de fluide. Les craquements solides dus aux mouvements du fluide produisent des ondes sismiques, dont la vitesse d'évolution spatiale est liée à l'onde P lente. Cette sismicité permet de retrouver la perméabilité (Shapiro, 2000) grâce aux relations de Biot (1956). De plus, elle permet de suivre l'injection de fluide et les changements de perméabilité qui en découle.

Tang et Cheng (1996) utilisent les ondes de Stoneley de forage pour déterminer la perméabilité autour du forage grâce à un modèle simplifié de Biot-Rosembaum (Rosenbaum, 1974).

## **5.2 Algorithmes d'inversion**

Je me suis focalisé sur une inversion par une méthode locale des amplitudes des ondes réfléchies en paramètres poro-élastiques dans le domaine temps-distance. Le modèle considéré est à une dimension. La spécificité de cette étude réside dans l'utilisation d'une théorie poro-élastique conduisant à la détermination des paramètres du milieu poreux, et non plus des vitesses ou impédances acoustiques ou élastiques. Ces paramètres poro-élastiques jouent sur les vitesses et les formes d'ondes, y compris sur l'atténuation et la dispersion des ondes (cf. chap 1).

Le problème direct présenté dans le chapitre 2 est très fortement non linéaire, cependant les méthodes locales d'inversion considère le problème linéaire à chaque itération. Le problème inverse est par définition mal posé : il est surjectif par la redondance de certaines informations et injectif par l'absence d'autres informations. On utilise donc une approche Bayésienne, c'est-à-dire que l'inversion utilise des informations *a priori* sur les données et les modèles (Tarantola, 1987; Gouveia et Scales, 1998) pour mieux contraindre le problème.

L'inversion considérée ici se base sur les travaux de Tarantola et Valette (1982a) et les développements de Tarantola (1987). Le problème est fortement non-linéaire et donc doit être résolu de manière itérative.

### **5.2.1 Définitions**

#### **Fonction coût**

Cette inversion repose sur la minimisation d'une fonction scalaire, appelée fonction



coût. Elle est définie au sens des moindres carrés par :

$$S(\mathbf{m}_n) = \frac{1}{2} ( \|\mathbf{d}_n - \mathbf{d}_{obs}\|_D^2 + \|\mathbf{m}_n - \mathbf{m}_p\|_M^2 ) = \frac{1}{2} ( \|\Delta\mathbf{d}_n\|_D^2 + \|\Delta\mathbf{m}_n\|_M^2 ) \quad (5.2)$$

$\mathbf{C}_D$  et  $\mathbf{C}_M$  sont les matrices de covariance des données et du modèle.  $\mathbf{m}_n$ ,  $\mathbf{m}_p$  et  $\mathbf{m}_0$  sont les modèles à l'itération  $n$ , le modèle *a priori* et le modèle de départ de l'inversion. Il est souvent judicieux de considérer le modèle de départ identique au modèle *a priori*, mais distinguer les deux présente certains avantages (cf. chapitre 6).

$\mathbf{d}_n = g(\mathbf{m}_n)$  et  $\mathbf{d}_{obs}$  correspondent aux données calculées à partir du modèle à l'itération  $n$  et aux données observées.  $\Delta\mathbf{d}_n$  et  $\Delta\mathbf{m}_n$  sont respectivement les résidus des données et les résidus des modèles à l'itération  $n$ , définis par :

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{d}_n &= g(\mathbf{m}_n) - \mathbf{d}_{obs} = \mathbf{d}_n - \mathbf{d}_{obs} \\ \Delta\mathbf{m}_n &= \mathbf{m}_n - \mathbf{m}_p \end{aligned} \quad (5.3)$$

La fonction coût est construite à partir de deux sources d'informations indépendantes, l'une représentant l'ajustement des données et l'autre l'écart entre le modèle trouvé et le modèle *a priori*. Ainsi, l'information sur le modèle *a priori* sert à compléter les manques du jeu de données ou à discriminer les solutions acceptables des solutions extravagantes.

La solution optimale est trouvée quand  $S(\mathbf{m}_n)$  est minimale. Le problème se résume à la minimisation quadratique d'une fonction scalaire. Les normes  $\|\cdot\|_D^2$  et  $\|\cdot\|_M^2$  sont des normes  $L_2$  définies par :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{d}\|_D^2 &= \mathbf{d}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{d} \\ \|\mathbf{m}\|_M^2 &= \mathbf{m}^T \mathbf{C}_M^{-1} \mathbf{m} \end{aligned} \quad (5.4)$$

L'espace des modèles est de dimension le nombre de couches fois le nombre de paramètres à inverser, tandis que l'espace des données contient le nombre d'échantillons spatiaux multiplié par le nombre de points en temps. L'espace des modèles est donc le plus petit des deux, ce problème va être résolu dans l'espace des modèles.

On définit le résidus des données  $\Delta\mathbf{d}_n$  et les résidus des modèles  $\Delta\mathbf{m}_n$  à l'itération  $n$  par :

A la fonction coût est associée une densité de probabilité d'obtenir le modèle  $\mathbf{m}_n$ , égale au produit des densités de probabilité sur le modèle  $\rho_m$  et les données  $\rho_d$  :

$$\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = e^{-S(\mathbf{m})} = \rho_m(\mathbf{m})\rho_d(\mathbf{d}) \quad (5.5)$$

Si  $\mathbf{g}$  était linéaire, cette densité de probabilité serait gaussienne et la fonction coût serait parabolique. La non-linéarité entraîne un comportement plus ou moins chaotique et non connu de  $S(\mathbf{m}_n)$  et  $\rho(\mathbf{m}_n)$ . Le problème inverse se restreint donc à trouver le point de l'espace des modèles pour lequel la densité de probabilité est maximale.

### Signification et choix des covariances

Les matrices de covariance des données  $\mathbf{C}_D$  et du modèle  $\mathbf{C}_M$  décrivent l'incertitude gaussienne sur les données et le modèle *a priori*. Leurs inverses servent en effet à pondérer l'importance accordée aux données et au modèle *a priori*. Par exemple, si  $\mathbf{C}_D$  est faible et  $\mathbf{C}_M$  fort, l'écart entre les données calculées et observées sera dominant dans la valeur du coût. Le modèle trouvé pourra donc être très éloigné du modèle *a priori*. Ces matrices agissent donc comme des “ressorts” qui tirent l'inversion vers un modèle proche du modèle *a priori* ou vers un sismogramme proche du sismogramme observé.

Pour mieux expliciter le sens de la matrice de covariance sur les données  $\mathbf{C}_D$ , Gouveia et Scales (1997) la décompose en observation  $\mathbf{C}_{OBS}$  et modélisation  $\mathbf{C}_{MOD}$ .  $\mathbf{C}_{OBS}$  va surtout être lié au bruit des données et aux résidus statiques : présence d'ondes de surface ou directes non souhaitées, interfaces pentées, mauvaise estimation de la source...  $\mathbf{C}_{MOD}$  peut être calculé à partir des erreurs de modélisation (bruit numérique, problèmes de discrétisation, interfaces mal placées, atténuation ou dispersion mal modélisée...).

La covariance  $\mathbf{C}_M$  sur le modèle va être choisie forte (et donc son inverse faible) si le modèle *a priori* est peu ou mal connu. Au contraire, si des connaissances extérieures sur le modèle permettent de bien contraindre ce dernier, cette matrice aura des valeurs faibles.

En pratique, dans un premier temps, ces matrices seront considérées diagonales avec une valeur constante. L'hypothèse sous-jacente est que les différents paramètres et couches sont décorrélés pour  $\mathbf{C}_M$ , et que les échantillons temporels et spatiaux sont eux aussi indépendants. L'intérêt de considérer des matrices non diagonales sera développé dans le paragraphe 5.2.5.

### Gradient de la fonction coût

Le coût sera minimal pour le modèle ayant le plus de vraisemblance avec les données et le modèle *a priori*. La ligne de plus grande pente le long de la fonction coût, c'est-à-dire la direction d'ascendance maximale  $\gamma_n$ , est liée au gradient  $\hat{\gamma}_n$  de la fonction coût .

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_n &= \frac{\partial S}{\partial \mathbf{m}}(\mathbf{m}_n) = \mathbf{G}_n^T \mathbf{C}_D^{-1} \Delta \mathbf{d}_n + \mathbf{C}_M^{-1} \Delta \mathbf{m}_n \\ \gamma_n &= \mathbf{C}_M \mathbf{G}_n^T \mathbf{C}_D^{-1} \Delta \mathbf{d}_n + \Delta \mathbf{m}_n = \mathbf{C}_M \hat{\gamma}_n\end{aligned}\tag{5.6}$$

$\mathbf{G}_n$  désigne la matrice des dérivées de Fréchet calculée à l'itération  $n$ . Ses composantes sont  $G_n(x_i, t_j, k, l) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{m}(k, l)}(x_i, t_j)$ , où  $x_i$ ,  $t_j$  et  $l$  désignent respectivement le capteur  $i$ , l'échantillon temporel  $j$  et la couche  $l$  du modèle  $\mathbf{m}$  pour le paramètre  $k$ .

$\hat{\gamma}_n$  est défini dans l'espace dual des modèles, tandis que  $\gamma_n$  l'est dans l'espace des modèles.

### Hessien de la fonction coût

On définit le Hessien  $\hat{\mathbf{H}}_n$  de la fonction coût au point  $\mathbf{m}_n$  comme la dérivée seconde de la fonction coût. L'incurvation  $\mathbf{H}_n$  de la fonction coût est calculée à partir de ce Hessien.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{H}}_n &= \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{m}^2}(\mathbf{m}_n) = \frac{\partial \hat{\gamma}_n}{\partial \mathbf{m}}(\mathbf{m}_n) \\ \mathbf{H}_n &= \frac{\partial \gamma_n}{\partial \mathbf{m}}(\mathbf{m}_n) = \mathbf{C}_D \hat{\mathbf{H}}_n\end{aligned}\quad (5.7)$$

Cette matrice est symétrique, définie et positive.

Elle peut être approximée par une expression relativement simple, en négligeant les termes du deuxième ordre. On parle alors de quasi-Hessien :

$$\hat{\mathbf{H}}_n \simeq \mathbf{G}_n^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{G}_n + \mathbf{C}_M^{-1} \quad (5.8)$$

### 5.2.2 Schéma général de l'algorithme d'inversion

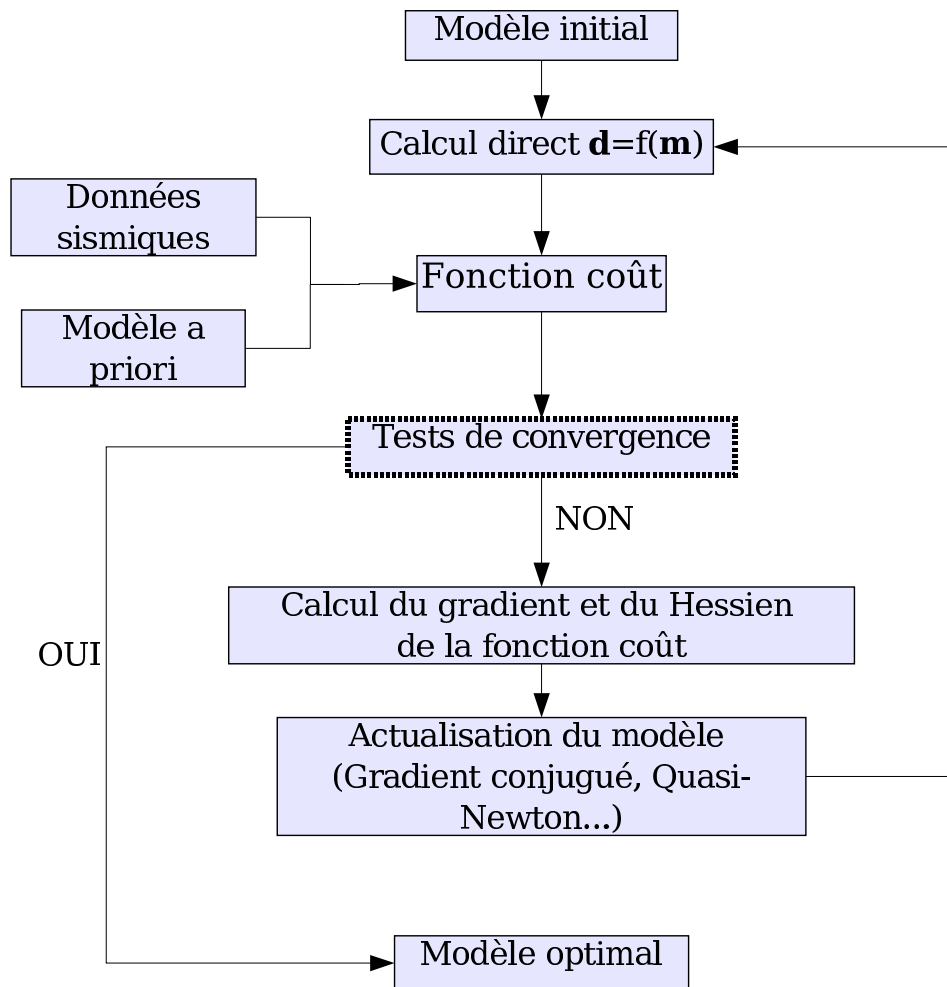


Figure 5.1: Schéma général de l'algorithme d'inversion.

La figure 5.1 présente le schéma général de l'algorithme d'inversion. Un sismogramme synthétique est calculé à partir d'un modèle initial. La comparaison de ces données synthétiques avec les données observées et des modèles initial et *a priori* permet de calculer la fonction coût. Le modèle est ensuite actualisé en utilisant le gradient et le Hessien de la fonction coût (voir paragraphe suivant). Une nouvelle modélisation permet de vérifier la décroissance de la fonction coût et la validité du modèle. Cette boucle est alors recommencée jusqu'à ce qu'un des critères de convergence soit atteint. Les critères de convergence utilisés ici sont :

- la non évolution de la fonction coût, qui indique que le modèle trouvé correspond à un minimum de la fonction coût ;
- la fonction coût devient inférieure à une fraction acceptable du coût initial ;
- un nombre limite d'itérations est atteint.

Les paragraphes suivants présentent les différentes méthodes d'inversion utilisées dans le cadre de cette thèse, c'est-à-dire les techniques de gradients conjugués et de quasi-Newton.

### 5.2.3 Méthodes de gradient et gradient conjugué

#### Méthode de gradient

En connaissant la direction de descente maximale, l'idée la plus simple pour atteindre le minimum est de descendre le long de cette direction tant que la fonction coût décroît.

$$\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n - \mu_n \boldsymbol{\gamma}_n, \quad \text{avec} \quad S(\mathbf{m}_{n+1}) < S(\mathbf{m}_n) \quad (5.9)$$

Plusieurs méthodes sont possibles pour déterminer le pas de descente  $\mu_n$  :

- par essai-erreur ;
- par interpolation parabolique.  $S(\mathbf{m}_{n+1})$  est calculé pour 3 valeurs différentes de  $\mu_n$ . Il est alors possible de faire passer une parabole par ces trois points et de calculer le pas de descente permettant d'atteindre le minimum de la parabole.
- par linéarisation de  $g$  autour de  $\mathbf{m}_n$ .

La même procédure est appliquée à l'itération suivante avec un nouveau gradient. Cette méthode est appelée méthode du gradient. L'inconvénient de cette méthode réside dans un nombre élevé d'itérations pour atteindre la convergence (cf. fig. 5.2).

#### Méthode de gradient conjugué

Pour remédier à ce problème, la méthode de gradient conjugué utilise une direction de descente qui tient compte du gradient à l'itération  $n$  et de la direction de descente calculée

à l'itération  $n - 1$ . On définit la direction de descente  $\Phi_n$  par :

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \gamma_0 \\ \Phi_n &= \gamma_n + \sigma_n \Phi_{n-1} \\ \sigma_n &= \frac{(\gamma_n - \gamma_{n-1})^T \mathbf{C}_M^{-1} \gamma_n}{\gamma_{n-1}^T \mathbf{C}_M^{-1} \gamma_{n-1}}\end{aligned}\tag{5.10}$$

La valeur de  $\sigma_n$  donnée ici a été calculée par Polak et Ribière (1969); Kormendi et Dietrich (1991). Le modèle est actualisé par :

$$\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n - \mu_n \Phi_n, \text{ avec } S(\mathbf{m}_{n+1}) < S(\mathbf{m}_n)\tag{5.11}$$

Le pas de descente  $\mu_n$  est alors estimé de la même façon que dans la méthode du gradient. En particulier, la linéarisation de  $g$  autour de  $\mathbf{m}_n$  donne :

$$\mu_n \simeq \frac{\gamma_n^T \mathbf{C}_M^{-1} \Phi_n}{\Phi_n^T \mathbf{H}_n \mathbf{C}_M^{-1} \Phi_n}\tag{5.12}$$

Cette méthode est plus efficace que la méthode de gradient simple. En effet, la direction de descente est plus précise car elle prend en compte les directions précédentes. Cet algorithme nécessite moins d'itérations, et un nombre moindre de calculs du problème direct (cf. fig. 5.2). Il reste cependant très coûteux lorsque le problème direct est peu rapide.

### Préconditionnement des données

En pratique, l'amplitude des ondes réfléchies, et donc des dérivées de Fréchet, diminue avec la profondeur de la perturbation. La part modèle dans la fonction coût ( $\mathbf{C}_M ||\Delta \mathbf{m}_n||^2$ ) devient alors beaucoup plus forte que la part des données et le modèle final ne s'éloigne pas du modèle *a priori* en profondeur.

Pour remédier à ce problème, une possibilité consiste à corriger la décroissance de l'amplitude avec la profondeur pour avoir une information sur les couches profondes. La partie donnée du gradient ( $\mathbf{G}_n^T \mathbf{C}_D^{-1} \Delta \mathbf{d}_n$ ) est donc multipliée pour chaque couche  $l$  par un facteur  $\lambda(l)$ . Il s'agit du rapport de l'énergie maximale des dérivées de Fréchet sur l'énergie de ces dérivées pour la couche considérée. C'est équivalent à pondérer les données pour accorder plus de poids aux arrivées profondes.

$$\lambda(l) = \left( \frac{\max_{0 < l < nl} [\mathbf{G}_n(l) \mathbf{G}_n^T(l)]}{\mathbf{G}_n(l) \mathbf{G}_n^T(l)} \right)^\alpha,\tag{5.13}$$

où  $l$  désigne la couche considérée et  $nl$  est le nombre de couches total. L'exposant  $\alpha$ , compris entre 0 et 1 permet d'appliquer une correction plus ou moins forte.

Dans les méthodes de gradients, le gradient est multiplié par un scalaire pour actualiser le modèle. Dans les méthodes de Newton, il est multiplié par une matrice (Hessien) qui compense la faible énergie provenant des couches profondes. Le préconditionnement n'est alors pas aussi indispensable, mais peut être utile pour donner plus de poids aux couches inférieures ou supérieures.

### 5.2.4 Méthodes de Newton

On cherche la valeur de  $\mathbf{m}$  telle que le gradient  $\gamma_{n+1}$  de la fonction coût s'annule, ce qui correspond à un extremum. En linéarisant le problème entre  $\mathbf{m}_n$  et  $\mathbf{m}_{n+1}$ , on obtient :

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{m}}(\mathbf{m}_n) (\mathbf{m}_{n+1} - \mathbf{m}_n) = 0 \quad (5.14)$$

En réorganisant cette expression, on obtient :

$$\mathbf{m}_{n+1} - \mathbf{m}_n = -\mathbf{H}_n^{-1} \cdot \gamma_n \quad (5.15)$$

Si  $\mathbf{H}_n$  est la dérivée seconde de la fonction coût, cette méthode est dite de Newton. Cependant, l'expression exacte du Hessien est longue à calculer car elle fait appel aux opérateurs de sensibilité à l'ordre 2. En pratique, on utilise le quasi-Hessien, qui est une expression simplifiée du Hessien (eq. (5.8)), la méthode est alors appelée quasi-Newton.

Dans l'hypothèse où la fonction coût est parabolique (problème linéaire), cette méthode converge directement (cf. fig. 5.2). Dès que  $g$  n'est plus linéaire, cette minimisation ne conduit pas directement au minimum et peut diverger. Il faut alors plusieurs itérations pour converger vers la meilleure solution. On utilise l'expression :

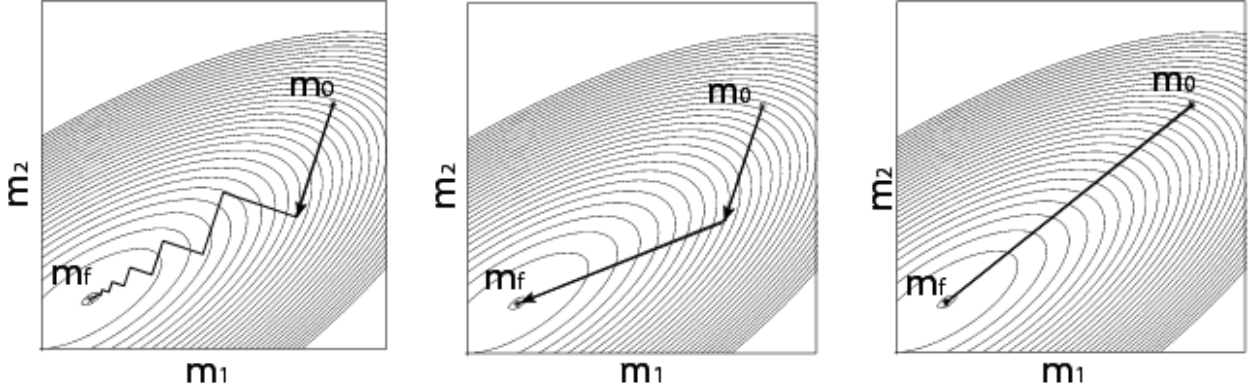
$$\mathbf{m}_{n+1} - \mathbf{m}_n = -\varepsilon_n \mathbf{H}_n^{-1} \cdot \gamma_n \quad (5.16)$$

$\varepsilon_n$  est inférieur à 1 et est choisi par essai-erreur à chaque itération pour vérifier une décroissance de la fonction coût.

Cette méthode converge relativement vite et donne de bons résultats. Son inconvénient réside dans l'inversion du Hessien qui peut être une matrice relativement grosse. Elle devient inutilisable si l'espace de travail est très grand. Pour remédier à ce problème, il est envisageable d'adapter l'algorithme de Newton en utilisant à la place du Hessien une matrice définie positive s'inversant rapidement. Par exemple, il est possible de garder uniquement la diagonale du Hessien.

Dans la pratique, j'ai utilisé cet algorithme en inversant dans un premier temps le quasi-Hessien grâce une décomposition de Cholesky, ce qui est très coûteux. De plus, les incertitudes numériques font que le Hessien n'est pas forcément défini positif. Dans un

deuxième temps, le système (5.15) est résolu directement en utilisant un algorithme de gradient conjugué pour estimer la meilleure valeur de  $\mathbf{H}_n^{-1} \gamma_n$ .



**Figure 5.2:** Schémas simplifiés décrivant les méthodes locales appliquées à un problème d'inversion linéaire à deux paramètres  $m_1$  et  $m_2$  : Gradient (gauche) ; Gradient conjugué (milieu) ; Newton (droite) (d'après Sirgue (2003)).

### 5.2.5 Covariance et norme $H^1$

#### Covariance des données

J'ai considéré jusqu'ici une matrice de covariance  $C_D$  diagonale, à valeur constante. Pour améliorer la qualité de l'inversion en ajustant aussi la dérivée temporelle du signal, la covariance sur les données peut être définies par (Tarantola, 1987; Valette et Lesage, 2007) :

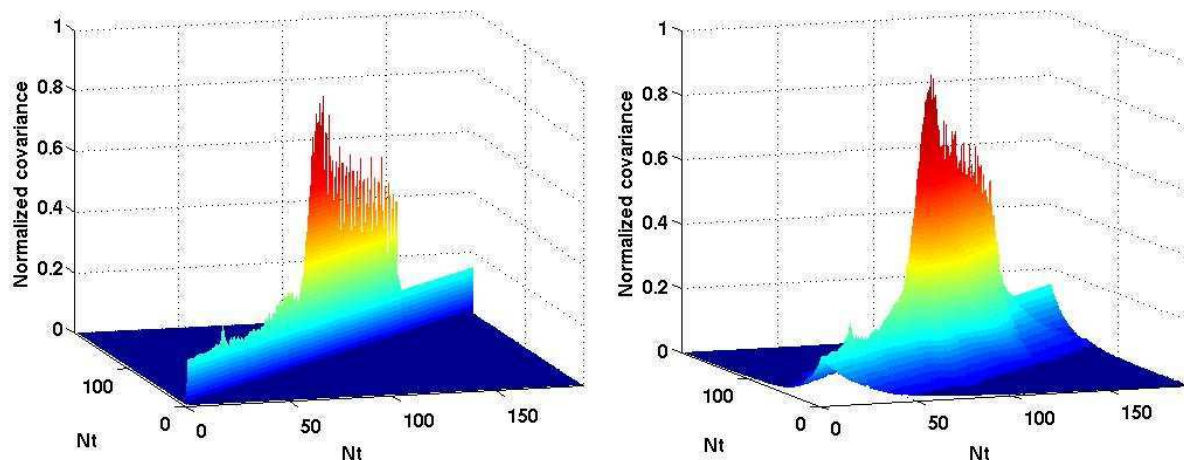
$$C_D(t_i, t_j) = \frac{\sigma_i \sigma_j}{2\xi} e^{-\frac{|t_i - t_j|}{\xi}} \quad (5.17)$$

$\xi$  est de l'ordre de  $\Delta t$  et a la même dimension.  $t_i$  et  $t_j$  désignent les temps des échantillons  $i$  et  $j$ , et sont compris entre le temps minimal  $t_1$  et maximal  $t_2$ .

La matrice de covariance, représentée sur la figure 5.2.5, est pseudo-diagonale : plus  $\xi$  est fort, plus la diagonale est étalée, et plus les échantillons vont être considérés temporellement dépendants. Les échantillons sont cependant supposés spatialement indépendants les uns des autres.

On peut démontrer (cf. Annexe 4; Tarantola, 1987) que la norme  $\| \cdot \|_D^2$  utilisée dans l'expression du coût (eq. (5.2)) devient :

$$\| d \|^2 \simeq \frac{\xi}{\sigma_i \sigma_j} \left( \frac{1}{\xi} \int_{t_1}^{t_2} [d(t)]^2 dt + \xi \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial d}{\partial t}(t) \right]^2 dt \right) \quad (5.18)$$



**Figure 5.3:** Matrices de covariances pour  $\xi$  égal à  $0.05 dt$  et  $20 dt$

Cette expression est une somme de carrés et l'opérateur de covariance est bien une matrice définie positive. Elle correspond à la norme  $H^1$ , qui est la somme de la norme classique  $L^2$  de  $d(t)$  et de celle de la dérivée  $\partial d(t)/\partial t$ . Utiliser la covariance des données dans l'équation (5.17) dans un algorithme de quasi-Newton ou de gradient revient donc à ajuster à la fois l'amplitude et la dérivée des sismogrammes. La constante  $\xi$  donne de l'influence à l'ajustement de l'amplitude (pour  $\xi < \Delta t$ ) ou de la dérivée (pour  $\xi > \Delta t$ ).

L'inverse de la matrice  $\mathbf{C}_D$  est calculé en utilisant un algorithme de Cholesky. Il présente un sinus cardinal centré sur la diagonale.

Il est possible de rajouter directement l'ajustement de la dérivée dans la fonction coût, ce qui nécessite de calculer une nouvelle expression pour le gradient et le Hessien de la fonction coût. Le stratagème utilisé ici est beaucoup plus facile à mettre en œuvre et adaptable à tous les problèmes.

De la même manière, il est possible de calculer d'autres noyaux de covariance pour utiliser d'autres normes, comme la norme  $H^2$  (ajustement du signal et de sa dérivée première et seconde). Sans changer la structure de l'optimisation par moindres carrés, les noyaux de covariances offrent une grande souplesse et de nombreuses possibilités à cet algorithme classique. Cette idée, totalement nouvelle pour améliorer l'ajustement des données, a déjà été utilisée pour la matrice de covariance du modèle.

### Covariance du Modèle

En suivant le même raisonnement, il peut être utile d'utiliser une matrice modèle non diagonale. Cela aura pour effet de lisser la fonction coût et d'éviter ainsi la présence de



minima locaux. Il est courant d'utiliser une matrice de covariance modèle de la forme (Hernandez et al., 1999, par exemple) :

$$\mathbf{C}_M(z_i, z_j) = \sigma_i \sigma_j e^{-\frac{(z_i - z_j)^2}{2\xi^2}} \quad (5.19)$$

Cette expression signifie qu'on suppose que les paramètres d'une couche dépendent des autres couches. Par contre, les différents paramètres restent non corrélés. La constante  $\xi$  est environ égale à l'épaisseur d'une couche. Si  $\xi$  augmente, le lissage sera plus fort, et le modèle trouvé plus lisse.

Par analogie avec l'expression utilisée pour la covariance données, on peut calculer la matrice de covariance du modèle qui correspondra à la norme  $H^1$  (eq. 5.17) (Monteiller et al., 2005). C'est cette expression qui sera testée dans la section 6.3.3.

Delprat-Jannaud et Lailly (1993) et Tondi et de Franco (2005) utilisent cette norme dans un algorithme d'inversion, en réécrivant totalement la fonction coût. Ils montrent que l'utilisation de la dérivée spatiale du modèle est un moyen efficace d'obtenir une solution unique, stable et indépendante des paramètres de discrétisation.

Cependant, les paramètres des milieux géologiques présentent souvent des variations verticales très fortes, et on souhaite obtenir une information sur le modèle la plus haute fréquence possible. Il est donc souhaitable de lisser le modèle en utilisant cette matrice de covariance non diagonale uniquement si des oscillations avérées de la fonction coût, ou des minima locaux, empêchent l'algorithme de converger dans un minimum.

### 5.2.6 Covariance *a posteriori*, erreurs

La densité de probabilité représentant l'information *a posteriori* est donnée par Tarantola et Valette (1982b) :

$$\sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \frac{\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m}) \Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})}{\mu(\mathbf{d}, \mathbf{m})} \quad (5.20)$$

$\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  est la densité de probabilité *a priori*.

$\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  est la densité de probabilité théorique, représentant l'information qui permet de relier  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{m}$ , c'est-à-dire notre capacité à résoudre l'équation de la poro-élastodynamique.

Enfin,  $\mu(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  est une densité de probabilité reliée à l'état de non information sur les paramètres. Ces trois termes peuvent être décomposés en produit d'information sur les données et sur les modèles.

Par analogie avec la densité de probabilité *a priori*, il est possible d'écrire  $\sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  sous la forme de l'exponentielle de la fonction coût finale (eq. 5.5). Les matrices de covariances

*a posteriori* sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'_{\mathbf{M}} &= (\mathbf{G}_{\infty}^T \mathbf{C}_{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{G}_{\infty} + \mathbf{C}_{\mathbf{M}}^{-1})^{-1} \simeq \mathbf{H}_{\infty}^{-1} \\ \mathbf{C}'_{\mathbf{D}} &= \mathbf{G}_{\infty} \mathbf{C}_{\mathbf{D}} \mathbf{G}_{\infty}^T \end{aligned} \quad (5.21)$$

L'indice  $\infty$  désigne la dernière itération effectuée. De plus, on peut définir un opérateur de résolution non linéaire pour quantifier l'erreur sur les données :

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{C}'_{\mathbf{M}} \mathbf{C}_{\mathbf{M}} \quad (5.22)$$

Si  $\mathbf{R}$  est proche de l'identité  $\mathbf{I}$ , la solution trouvée est correcte. Sinon, le problème inverse est soit mal résolu, soit mal posé, soit les deux. Si le problème est mal posé, une matrice  $\mathbf{R}$  non diagonale indique une interdépendance entre paramètres, le problème pouvant cependant être bien résolu. Au contraire, si le problème est bien posé mais mal résolu, l'information disponible est ambiguë et a été utilisée pour déterminer de mauvais paramètres.

Cette étude est fondamentale dans les méthodes d'optimisation évoquées dans la section 5.1.3. Cependant, elle devient vite délicate dans le cas des méthodes locales complexes. En effet, la solution finale peut correspondre à un minimum local de la fonction coût. Dans ce cas, on quantifie l'erreur autour de cette solution, ce qui n'a pas de sens. Cette approche stochastique *a posteriori* n'a pas été utilisée dans le cadre de cette thèse.

## 5.3 Conclusion

Le but de cette inversion de formes d'ondes complètes est de déterminer les paramètres poro-élastiques directement, sans passer par une inversion en vitesses d'ondes. Or le problème direct est fortement non linéaire et relativement long à calculer. Cela impose d'utiliser des méthodes locales d'inversion. Un algorithme de minimisation par moindres carrés et une méthode de gradient conjugué ou de quasi-Newton semblent donc adaptés. La non-linéarité du problème direct impose cependant un grand nombre d'itérations. L'algorithme qui semble préférable dans ce cas est l'algorithme de quasi-Newton. En effet, il demande moins d'itérations et la petite taille du système servant à actualiser le modèle le rend facile à résoudre.

En plus de ces algorithmes classiques en géosciences, il est intéressant de considérer des matrices de covariances non diagonales. En particulier, la forme de la matrice de covariance des données dans l'équation (5.17) permet d'adapter très facilement la minimisation au sens de la norme  $L^2$  à une minimisation conjointe de l'amplitude des ondes et de leur dérivée temporelle.

De nombreux tests doivent maintenant être menés pour ajuster l'algorithme à ce problème (choix des paramètres de covariance, résolution possible, données nécessaires...) et définir une stratégie d'inversion (choix et possibilité d'inversion des paramètres...).



# Chapitre 6

## Applications de l’algorithme d’inversion sur des données synthétiques

### Sommaire

---

6.1	Introduction . . . . .	135
6.2	Résultats d’inversion . . . . .	137
6.3	Algorithmes d’inversion et covariances . . . . .	148
6.4	Stratégie d’amélioration de l’inversion . . . . .	153
6.5	Choix des données et résolution . . . . .	159
6.6	Conclusion . . . . .	167

---

### 6.1 Introduction

L’objectif de ce chapitre est d’évaluer les possibilités d’inverser des signaux réels par l’approche présentée au chapitre 5. Pour cela, il est d’abord nécessaire de conduire différents tests sur des données synthétiques.

Le code d’inversion est pour l’instant limité à une géométrie de réflexion. Il est possible de considérer une source radiale ou verticale associée à un déplacement lui aussi radial ou vertical dans la géométrie  $P - SV$ , et un couple source-déplacement tangentiel-tangentiel dans le cas  $SH$ . Les ondes directes et de surface peuvent être prises en compte ou non.

Certains résultats de ce chapitre ont fait l’objet d’un résumé pour le congrès du *European Association of Geoscientists & Engineers* (De Barros et Dietrich, 2007). Cet article est donné en annexe B.

#### Plan du chapitre

La première partie est consacrée à l’inversion des paramètres poro-élastiques  $\rho_s$ ,  $\rho_f$ ,

$k_0$ ,  $G_s$ ,  $K_s$ ,  $K_f$ ,  $cs$  et  $\phi$ , indépendamment ou simultanément. Le choix de nouveaux paramètres, comme la saturation en fluide  $S_i$  ou le taux volumique d'un minéral  $T_i$  permettent de réduire le nombre de paramètres à déterminer.

La deuxième partie traite du choix de l'algorithme et des covariances : tout d'abord, l'inversion par gradient conjugué est comparée à celle par quasi-Newton, puis l'influence de la covariance des données et du modèle est testée.

La troisième partie est une étude de différentes stratégies permettant d'améliorer les résultats d'inversion. Il est ainsi possible d'utiliser les ondes de surface, de démarrer de multiples modèles initiaux, d'appliquer des fenêtrages en offset et/ou en temps sur les données ou de fixer la valeur des premières couches du modèle.

Enfin, la dernière partie s'intéresse au choix des données (nombre de traces et offset spatial, résolution) et aux difficultés potentiellement amenées par l'inversion de données réelles (présence de bruit...).

### Modèles utilisés

Pour tester les possibilités de l'inversion, j'ai utilisé deux séries différentes de modèles. La première série est calculée à partir d'un modèle infini dont les caractéristiques sont

$\phi ( )$	$k_0 (m^2)$	$\rho_f (kg/m^3)$	$\rho_s (kg/m^3)$	$K_s (GPa)$	$G_s (GPa)$	$K_f (GPa)$	$cs ( )$
0.20	$5 \cdot 10^{-12}$	1000	2700	24	24	2.2	50

**Table 6.1:** Paramètres du milieu infini servant à construire la première série de modèles.

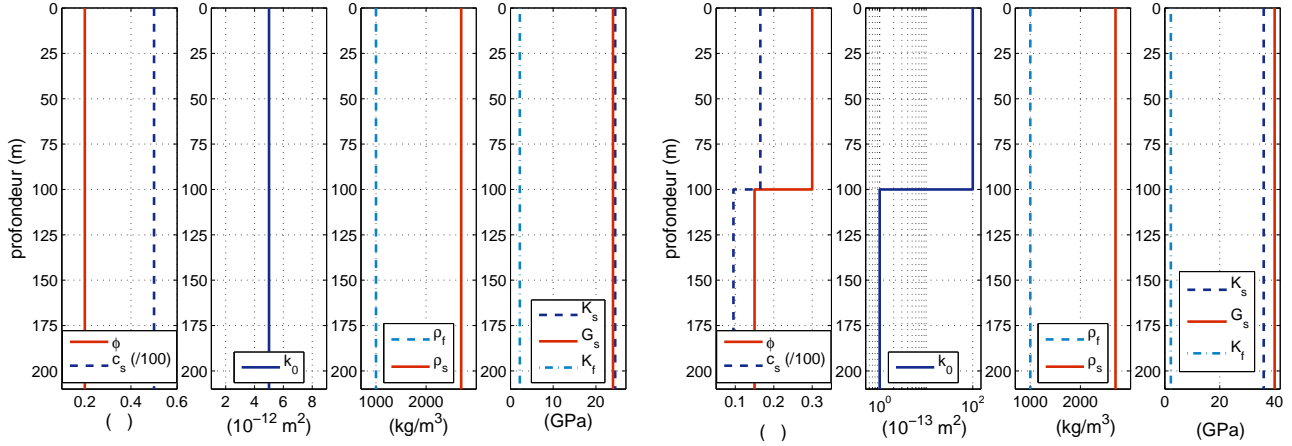
données dans la table 6.1. Le modèle "vrai" est constitué de 40 couches de 5 mètres d'épaisseur au dessus d'un demi-espace infini. Les réflexions sur la surface libre ne sont pas prises en compte. Un ou plusieurs paramètres sont perturbés dans 4 couches entre 90 et 110 mètres de profondeur pour obtenir un modèle "créneau".

$\phi ( )$	$k_0 (m^2)$	$\rho_f (kg/m^3)$	$\rho_s (kg/m^3)$	$K_s (GPa)$	$G_s (GPa)$	$K_f (GPa)$	$cs ( )$
0.30	$10^{-11}$	1000	2700	36	40	2.2	16.5
0.15	$10^{-13}$	1000	2700	36	40	2.2	9.5

**Table 6.2:** Paramètres du milieu bicouche servant à construire la deuxième série de modèles.

La deuxième série de modèles est obtenue à partir d'un modèle à deux couches correspondant à une couche de 100 mètres de sable siliceux consolidé au dessus d'un demi espace constitué de grès (cf tab. 6.2). L'effet de la surface libre n'est pas non plus considéré. Le modèle vrai est constitué de 20 couches de 10 mètres d'épaisseur, et un ou plusieurs paramètres sont perturbés aléatoirement de telle manière à obtenir un modèle complexe servant à calculer les sismogrammes synthétiques pour une inversion d'un seul paramètre

ou multiparamètre.



**Figure 6.1:** À gauche, modèle uniforme (cf. tab. 6.1) et à droite, modèle bicouche (cf. tab. 6.2). Ils sont utilisés comme modèles de départ et servent à construire les modèles vrais.

Les modèles initiaux sont généralement les modèles lisses des tables 6.1 et 6.2. Dans la majorité des cas, et si le texte ne le précise pas, le modèle initial sert aussi de modèle *a priori*.

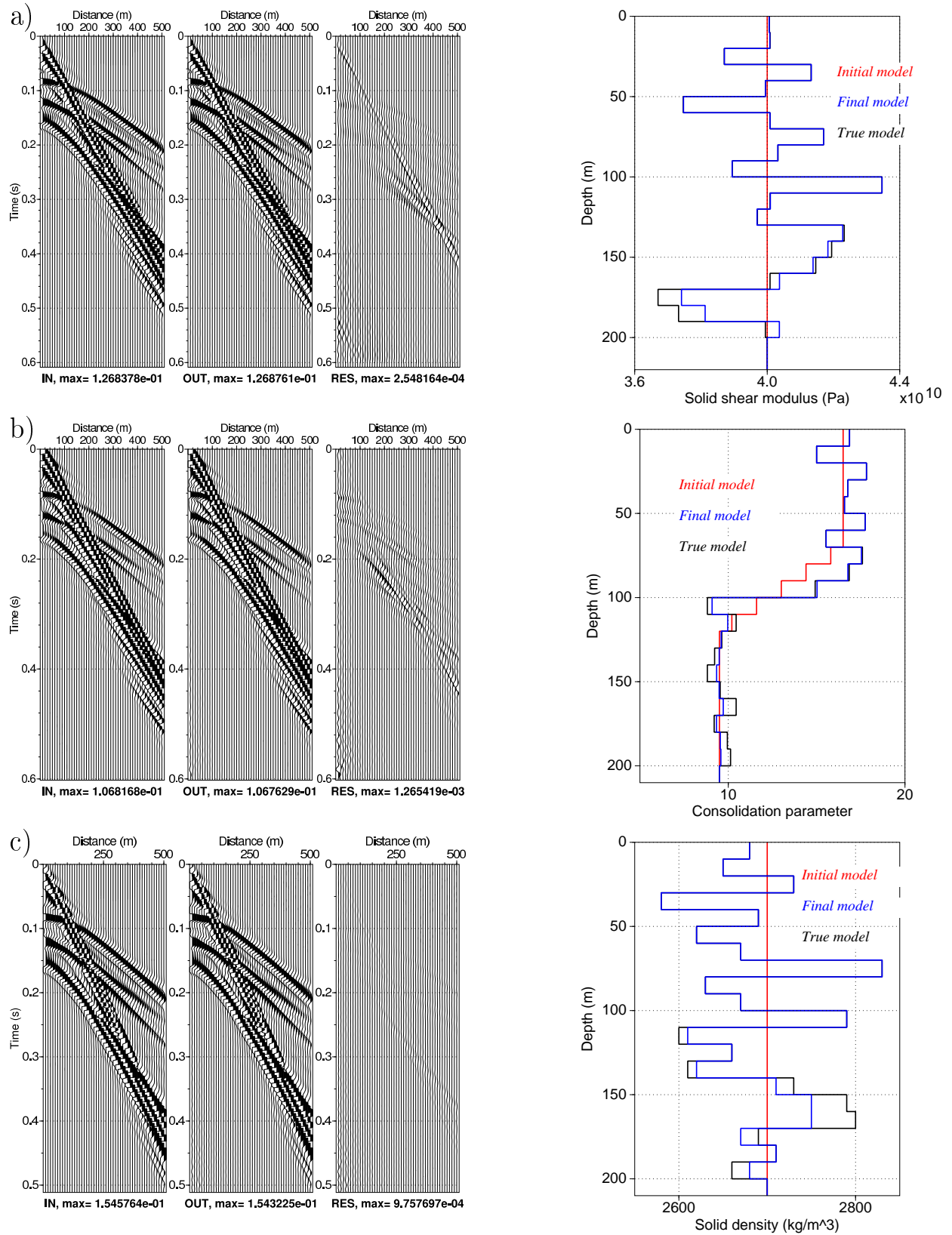
## 6.2 Résultats d'inversion

### 6.2.1 Inversion d'un seul paramètre

J'ai tout d'abord testé l'inversion des différents paramètres. Pour cela, j'ai utilisé le modèle 2 (cf. tab. 6.2), en ne perturbant qu'un seul paramètre et en laissant les autres constants et connus. Je cherche donc à reconstruire un seul paramètre en fonction de la profondeur. La fréquence centrale du Ricker utilisée ici est de 53 Hz, pour des couches de 10 mètres d'épaisseur. L'algorithme choisi, pour la qualité des résultats obtenus, est l'algorithme de quasi-Newton, couplé avec une matrice de covariance des données  $\mathbf{C}_D$  non diagonale et une matrice de covariance du modèle  $\mathbf{C}_M$  diagonale.

Il est intéressant de noter que les différents paramètres ne se retrouvent pas tous aussi facilement :

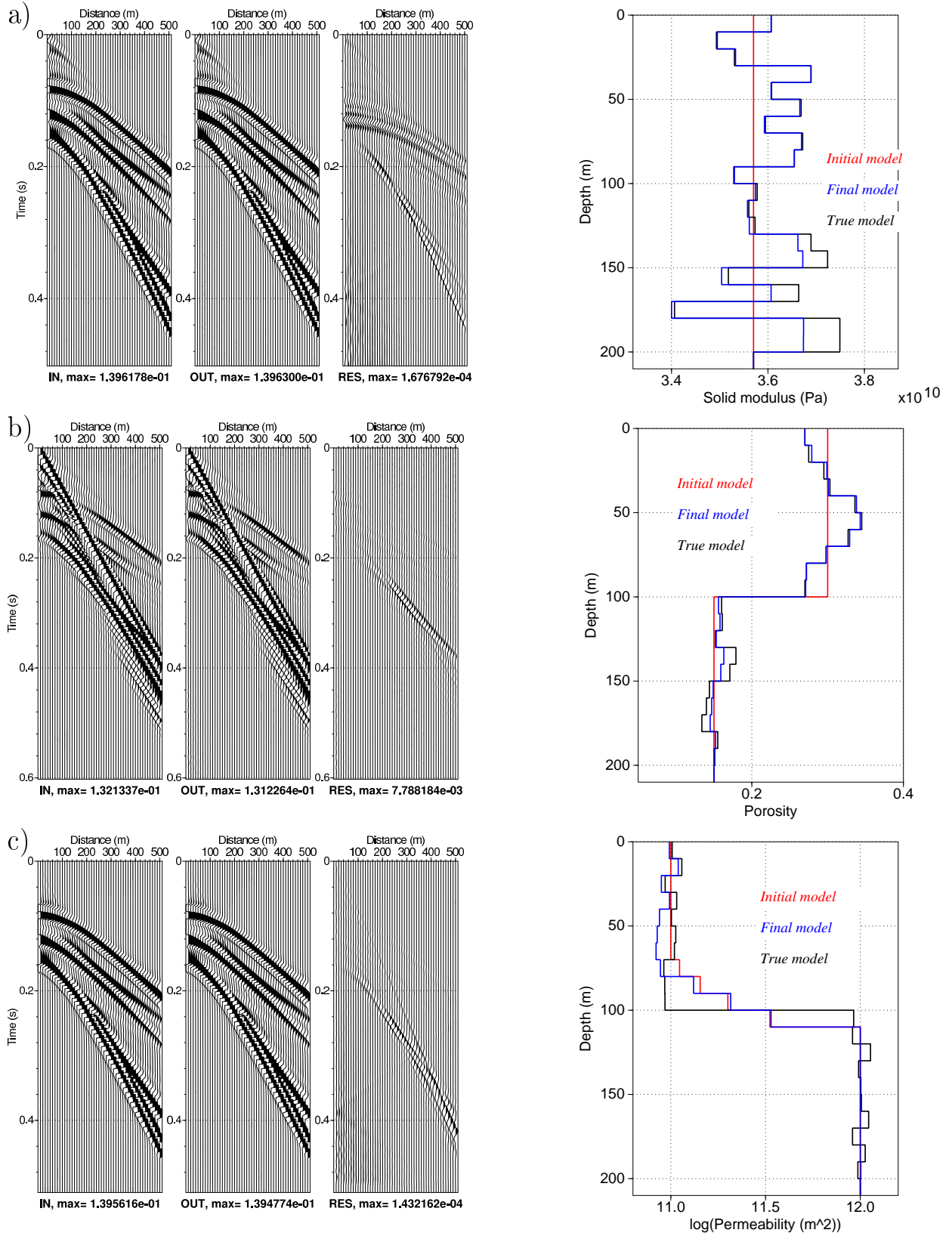
- Les modules d'incompressibilité et de cisaillement, les densités et le paramètre de consolidation (cf. fig. 6.3a et 6.2a, b et c) se retrouve très bien. On note juste une légère dégradation de la reconstruction du modèle avec la profondeur. Pour les couches inférieures, la majorité de l'information vient de la partie modèle dans la fonction coût, le modèle *a priori* a donc une influence très forte.



**Figure 6.2:** Résultats d'inversion (de gauche à droite : données synthétiques, sismogramme calculé à la fin de l'inversion et résidus correspondants ; modèle vrai, initial (et a priori dans ce cas) et final) pour :

- a) le module de cisaillement solide  $G_s$ ,
- b) la consolidation  $c_s$ ,
- c) la densité solide  $\rho_s$ .





**Figure 6.3:** Résultats d'inversion (de gauche à droite : données synthétiques, sismogramme calculé à la fin de l'inversion et résidus correspondants ; modèle vrai, initial (et a priori dans ce cas) et final) pour : a) le module d'incompressibilité solide  $K_s$ , b) la porosité  $\phi$ , c) la perméabilité  $k_0$ .

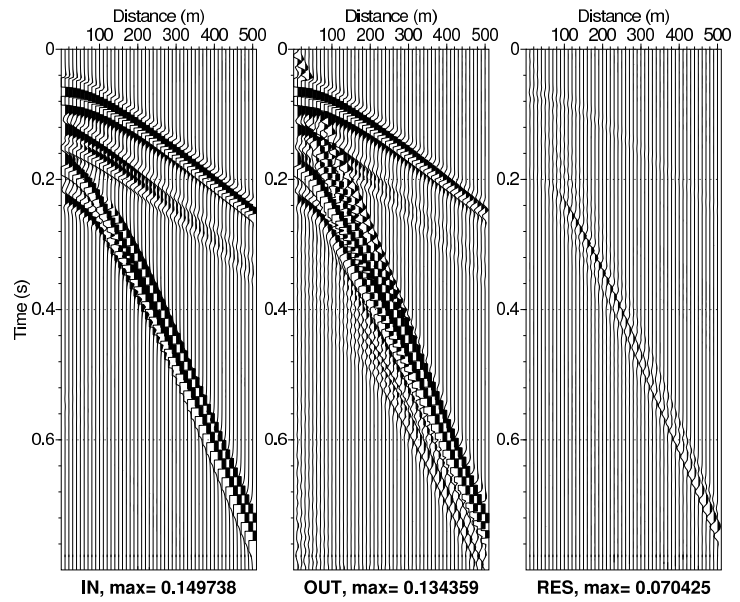
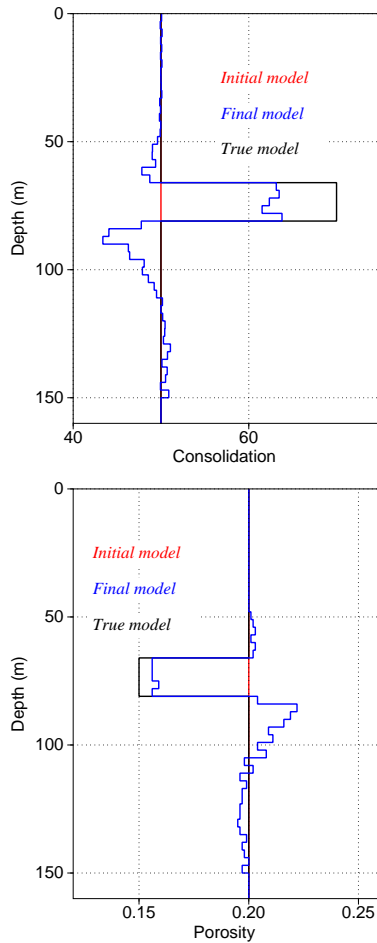
- La perméabilité peut varier de plusieurs ordres de grandeurs. Il est donc plus intéressant de chercher à reconstruire le logarithme de la perméabilité (cf. fig. 6.3c). Un changement de variables a été effectué, à la fois sur le paramètre et sur la dérivée de Fréchet pour prendre en compte ce problème. Comme on pouvait s'y attendre, l'amplitude extrêmement faible et la non-stabilité de la dérivée de Fréchet correspondante fait qu'il est très difficile de reconstruire le modèle de perméabilité. Malgré la faiblesse de son amplitude, le bruit numérique gêne l'inversion, ce qui rend impossible l'idée de retrouver la perméabilité par l'inversion de sismogrammes réels.
- Les paramètres du fluide posent aussi des problèmes de grandes variations. En considérant un milieu non saturé, avec l'hypothèse sous-jacente d'un fluide homogène, les variations de  $K_f$  peuvent varier de  $10^5$  à  $2.10^9$  pour un mélange eau et air. En revanche, si l'on s'intéresse par exemple à la concentration d'un fluide en sels, les variations recherchées de  $K_f$  vont être extrêmement faibles. Il est donc délicat d'appliquer la même procédure que pour la perméabilité. Au cas par cas, il faudra inverser les données pour retrouver soit  $K_f$  soit son logarithme.
- Il est possible de retrouver les variations de la porosité relativement bien (cf. fig. 6.3b). Cependant, l'inversion de ce paramètre est délicate. En effet, la fonction coût semble être très chaotique et de multiples solutions sont trouvées par l'algorithme selon le modèle initial considéré (cf. fig. 6.15). De faibles variations de la porosité entraînent de fortes différences dans les sismogrammes, tant sur la forme que sur la vitesse des ondes. Les données et le sismogramme initial sont donc trop éloignés, le modèle *a priori* et le modèle vrai aussi. En outre, la complexité des Dérivées de Fréchet associée à ce paramètre peut entraîner des problèmes d'ambiguïté de phase. Il est donc nécessaire de lisser la fonction coût en utilisant une matrice de covariance du modèle non diagonale. Le modèle final est ainsi moins précis mais plus stable.

### 6.2.2 Inversion multiparamètre

En général, plusieurs paramètres, voire tous, sont inconnus dans les milieux géologiques. Il est donc nécessaire de tester la possibilité de retrouver plusieurs paramètres simultanément ou séquentiellement.

#### Inversion couplée multiparamètre

Un des gros intérêts des expressions semi-analytiques des dérivées de Fréchet est le temps gagné par le calcul groupé de ces opérateurs pour tous les paramètres. Cependant, le chapitre 4 montre que les réponses sismiques à des perturbations sont très proches pour

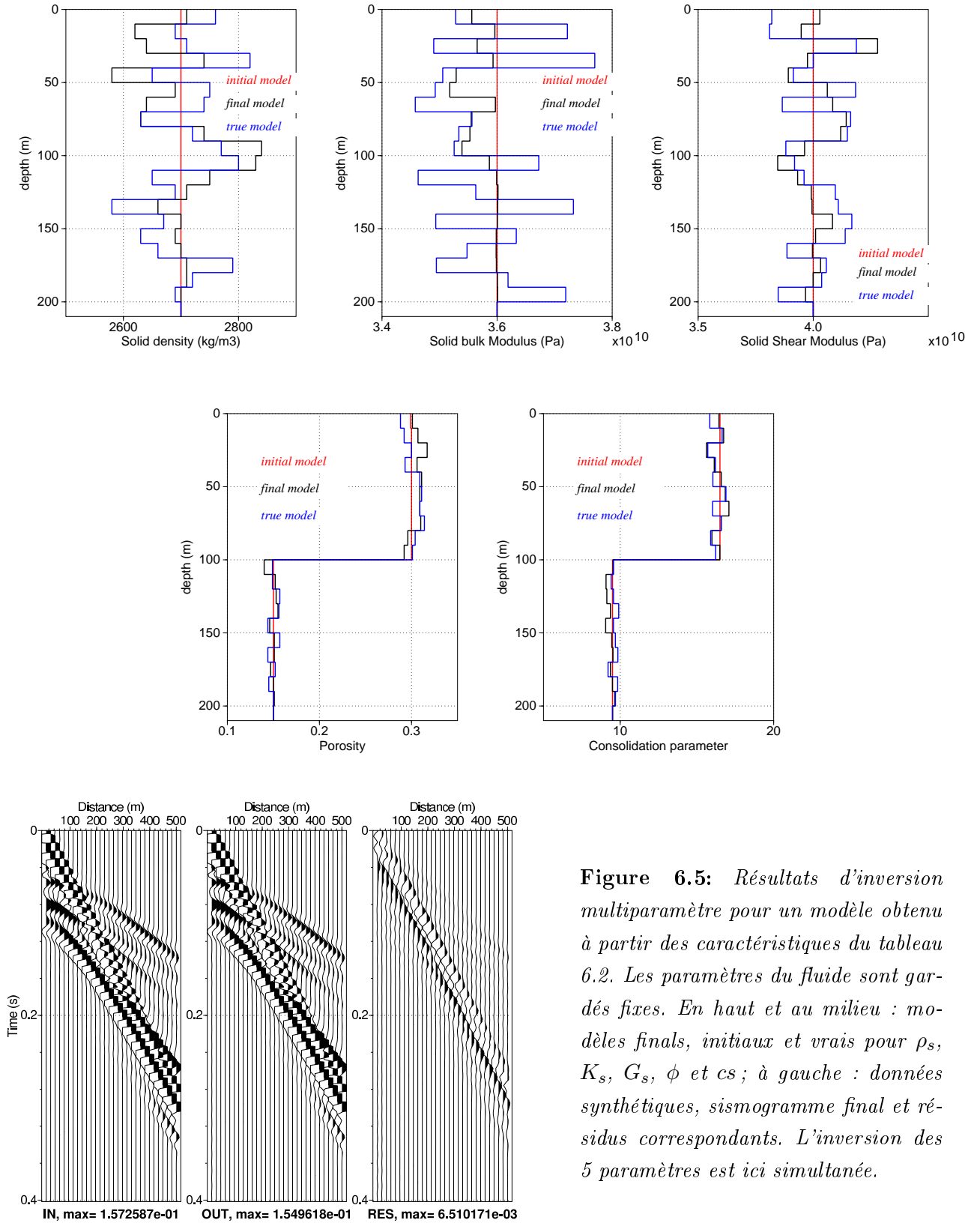


**Figure 6.4:** Résultats pour une inversion simultanée de la porosité et de la consolidation pour un modèle créneau (cf. table 6.1). A gauche : modèles vrais, initiaux et finals pour la consolidation (haut) et la porosité (bas). A droite : données synthétiques, sismogramme à la fin de l'inversion et résidus correspondants.

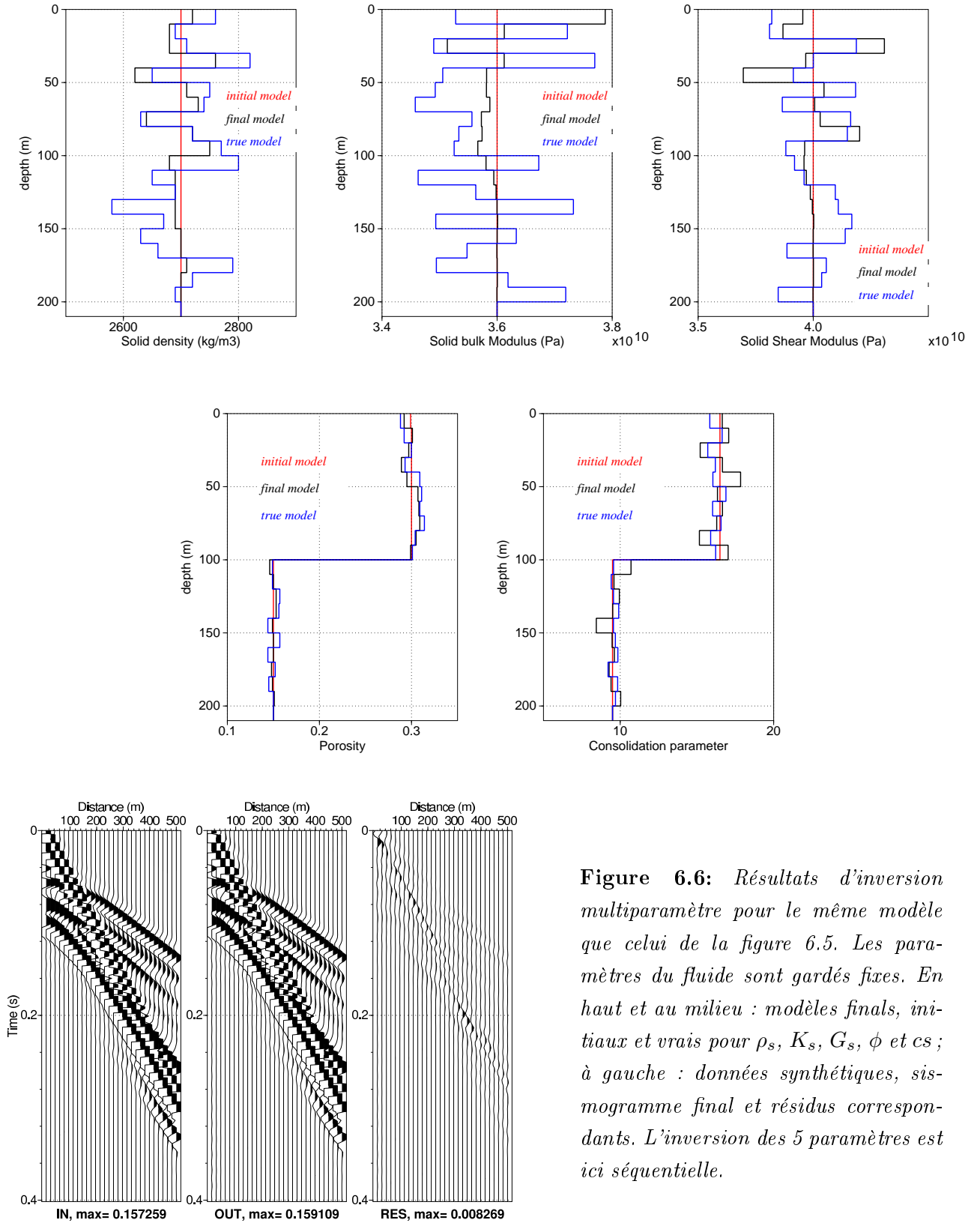
des paramètres différents.

L'inversion couplée de paramètres donne des résultats satisfaisants dans le cas de problèmes simples. Par exemple, la reconstruction simultanée d'un modèle créneau (modèle 1) en porosité et consolidation est très correcte. La figure 6.4 montre que les modèles sont relativement bien retrouvés. Les résultats restent cependant moins bons que pour l'inversion d'un seul paramètre. En effet, des oscillations parasites apparaissent, notamment pour les couches mal contraintes les plus profondes, et l'amplitude des créneaux est mal reconstruite. Ce résultat reste intéressant au vu du fort couplage sismique entre ces deux paramètres (chap. 4).

L'inversion de modèles plus complexes avec plus de paramètres pose des problèmes. La figure 6.5 montre les résultats d'une inversion à 5 paramètres. Les paramètres sont mal retrouvés, même si les données sont bien reconstruites. L'erreur de reconstruction de chaque paramètre va se répercuter sur les autres paramètres qui vont la compenser. Les valeurs réelles des paramètres ne sont donc pas du tout retrouvées. Par contre, il est intéressant de remarquer que les variations relatives des paramètres d'une couche par rapport à l'autre sont souvent bien reconstruites. L'information présente dans la forme



**Figure 6.5:** Résultats d'inversion multiparamètre pour un modèle obtenu à partir des caractéristiques du tableau 6.2. Les paramètres du fluide sont gardés fixes. En haut et au milieu : modèles finals, initiaux et vrais pour  $\rho_s$ ,  $K_s$ ,  $G_s$ ,  $\phi$  et  $cs$  ; à gauche : données synthétiques, sismogramme final et résidus correspondants. L'inversion des 5 paramètres est ici simultanée.



**Figure 6.6:** Résultats d'inversion multiparamètre pour le même modèle que celui de la figure 6.5. Les paramètres du fluide sont gardés fixes. En haut et au milieu : modèles finals, initiaux et vrais pour  $\rho_s$ ,  $K_s$ ,  $G_s$ ,  $\phi$  et  $cs$  ; à gauche : données synthétiques, sismogramme final et résidus correspondants. L'inversion des 5 paramètres est ici séquentielle.

et l'amplitude des ondes réfléchies est suffisante pour trouver une bonne estimation des contrastes aux interfaces, mais pas des amplitudes absolues.

### Inversion séquentielle couplée

Une autre méthode pour inverser plusieurs paramètres est de les inverser séquentiellement. L'utilisation des expressions analytiques des dérivées de Fréchet ne permet pas ici de gain de temps significatif. Toute la difficulté réside alors dans le choix de l'ordre des paramètres à inverser. Comme ceux-ci sont couplés, les premiers paramètres inversés utiliseront de l'information destinée à d'autres paramètres. Tarantola (1986) montre que dans le cas élastique il est préférable d'inverser les ondes P, puis les ondes S et enfin la densité. Pour résoudre le même problème que celui de la figure 6.5, j'ai donc choisi d'inverser d'abord  $K_s$ , qui n'a d'influence que sur les ondes P, puis  $G_s$  qui joue principalement sur les ondes S, ensuite  $cs$  et  $\phi$  et enfin  $\rho_s$ .

La figure 6.6 présente les modèles et sismogrammes. Les résultats obtenus ne sont pas meilleurs que ceux trouvés par une inversion couplée. Certains paramètres sont un peu mieux reconstitués (porosité), d'autres le sont moins (consolidation). Il est surprenant que l'inversion de  $K_s$ , qui débute le processus, conduise à un si mauvais modèle. J'ai aussi essayé de changer l'ordre d'inversion de ces paramètres sans amélioration notable des résultats.

L'inversion séquentielle n'apparaît donc pas préférable par rapport à l'inversion simultanée, et est de plus, beaucoup plus longue à calculer.

L'inversion multiparamètre est ici un problème mal posé qui ne semble pas pouvoir donner de solutions satisfaisantes.

### 6.2.3 Inversion différentielle

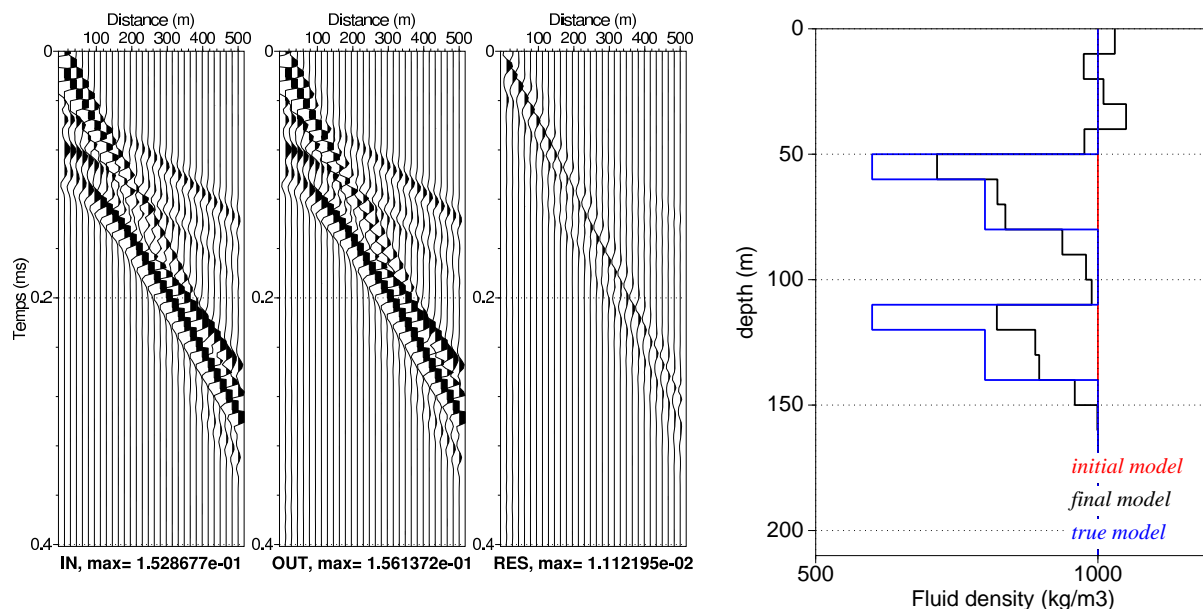
L'inversion multiparamètre conduit à un modèle faux mais permet de bien reconstruire les données. A partir de ce modèle mal retrouvé, il est cependant possible de suivre des changements temporels des paramètres du modèle par un processus d'inversion différentielle.

Les résultats d'inversion de la figure 6.7 ont été obtenues en deux étapes :

- Une inversion multiparamètre permet de trouver un modèle pour les paramètres du solide qui explique les données. Les résultats sont ceux donnés dans la figure 6.5.
- La densité du fluide, considérée constante et connue jusque là, est ensuite perturbée dans le modèle vrai. Le modèle final obtenu dans l'étape 1 (fig. 6.5) sert de modèle initial et *a priori* pour une nouvelle inversion servant à retrouver la densité fluide.

Les résultats (fig. 6.7) montrent que cette double inversion conduit à des résultats très corrects. Les données sont relativement bien reconstruites et les variations de la densité fluide sont bien localisées même si leur amplitude n'est pas parfaitement retrouvée.

Ce processus peut être très utile pour suivre des variations temporelles de fluide dans



**Figure 6.7:** Résultats d'inversion pour la densité du fluide (de gauche à droite : données synthétiques, sismogramme final et résidus correspondants ; modèle vrai, initial (et a priori dans ce cas) et final).

un réservoir, par exemple pour du stockage géologique de  $\text{CO}_2$ . Avant injection, les paramètres solide sont imparfaitement estimés par inversion multiparamètre mais permettent d'expliquer les données mesurées. Ce modèle est alors utilisé comme modèle de référence dans une nouvelle inversion pour localiser la répartition du  $\text{CO}_2$  au fur et à mesure de son injection.

## 6.2.4 Nouveaux paramètres :

### Inversion de la saturation et lithologie

Un autre moyen de contourner la difficulté d'inverser simultanément plusieurs paramètres est d'utiliser de l'information extérieure *a priori*. De plus, l'utilisation des Dérivées de Fréchet dans l'algorithme d'inversion offre une grande souplesse, ce qui permet de changer d'inconnues pour inverser des paramètres plus adaptées aux problématiques concrètes.

### Nouveaux paramètres $S_i$ et $T_i$

Certains paramètres sont physiquement liés et ne varient pas indépendamment les uns

des autres : c'est le cas de la densité et du module d'incompressibilité fluide ou de la densité, module de cisaillement et d'incompressibilité du minéral. A l'aide de la connaissance *a priori* des fluides et des minéraux en jeu, il est théoriquement possible de n'inverser qu'un seul paramètre pour le fluide (teneur  $S_i$  en fluide  $i$ ) et pour le minéral (pourcentage volumique  $T_i$  du minéral  $i$ ).

La théorie de Biot (1956) n'est valide que pour un fluide et un minéral homogène et isotrope. Dans la réalité, ce n'est pas le cas. Cependant, à défaut d'une théorie simple et unifiée et comme de nombreux auteurs, je considère cette théorie applicable dans le cas de fluide biphasique et de minéraux non homogènes.

La teneur en fluide est obtenue en utilisant les relations (1.9), c'est-à-dire à partir d'une moyenne arithmétique pour la densité  $\rho_f$  et harmonique (loi de Reuss) pour le module  $K_f$ . Dans le cas d'un mélange de deux fluides (indités 1 et 2), la dérivée de Fréchet du déplacement vertical  $U$  par rapport à la teneur en fluide 1  $S_1$  est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial S_1} &= \frac{\partial U}{\partial K_f} \frac{\partial K_f}{\partial S_1} + \frac{\partial U}{\partial \rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial S_1} \\ \text{avec} \quad \frac{\partial \rho_f}{\partial S_1} &= \rho_{f1} - \rho_{f2} \\ \text{et} \quad \frac{\partial K_f}{\partial S_1} &= K_f^2 \frac{K_{f1} - K_{f2}}{K_{f1} K_{f2}} \end{aligned} \tag{6.1}$$

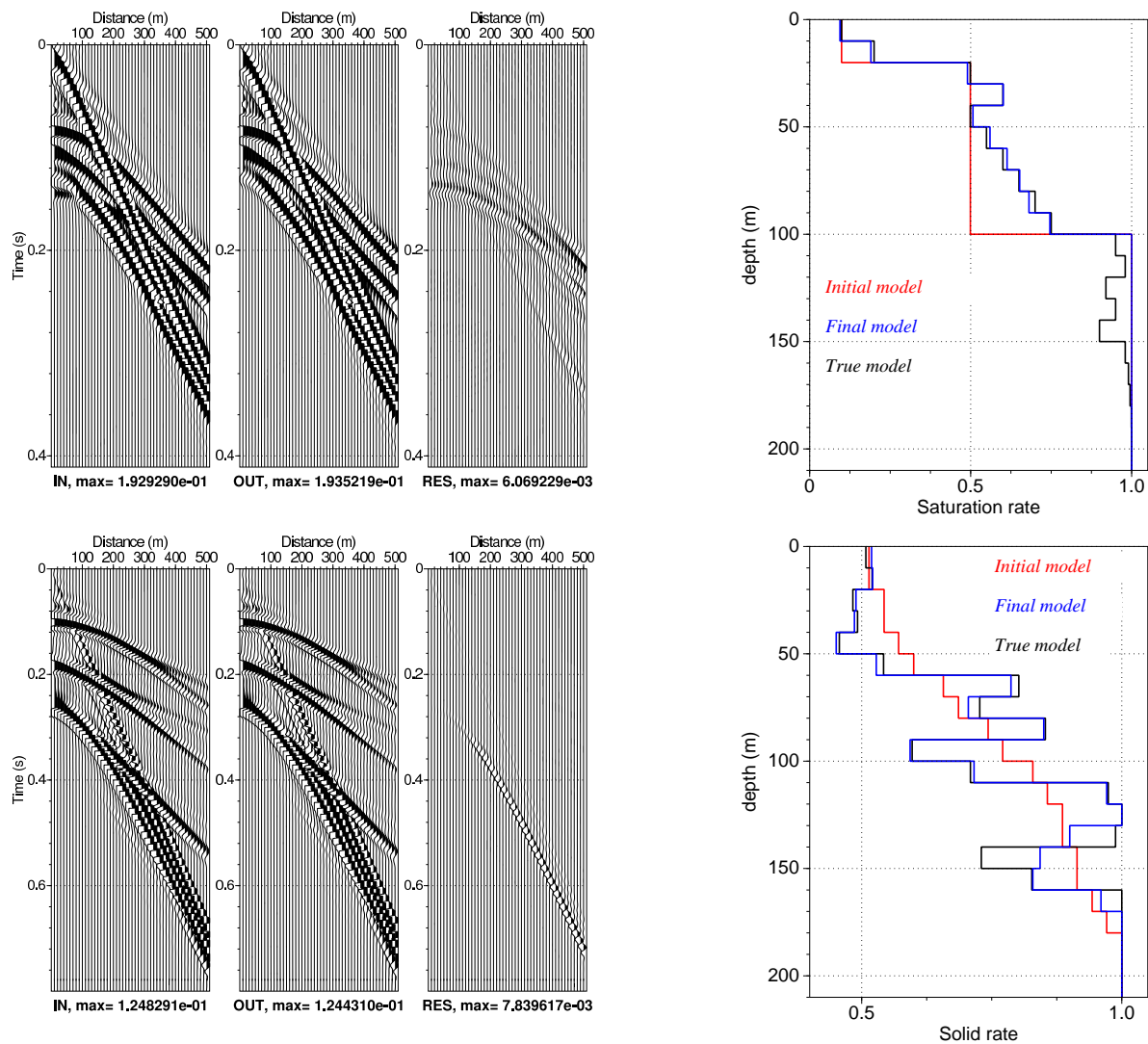
De la même façon, il est possible de calculer la dérivée partielle de  $U$  par rapport à la teneur volumique en minéral  $i$   $T_i$ . Pour cela, j'ai utilisé une loi de Reuss pour le calcul de  $G_s$  et  $K_s$  et une moyenne arithmétique pour  $\rho_s$ . L'utilisation de ces relations est plus discutable, car  $G_s$  et  $K_s$  sont mal connus pour un minéral seul (cas de microfissures dans les grains par exemple) et ne varient pas forcément avec la même loi. Cependant, ces relations ont l'avantage d'être très simples.

Le nombre de paramètres à déterminer par l'inversion pour complètement décrire le modèle passe de 8 à 5 pour un milieu ayant deux constituants minéraux et deux fluides saturants connus ( $S_1$ ,  $T_1$ ,  $\phi$ ,  $cs$  et  $k_0$ ). Dans l'algorithme d'inversion, le calcul du problème direct et des dérivées de Fréchet se fait toujours à partir des 8 paramètres initiaux. Par contre,  $S_1$  et  $T_1$  sont les variables ajustées dans le processus d'inversion. Il est donc nécessaire, à chaque itération et à chaque calcul direct, de recalculer les paramètres fluide et solide à partir de  $S_1$  et  $T_1$ .

### Problèmes aux bornes 0 et 1

$S_1$  et  $T_1$  sont compris entre 0 et 1 inclus et ont une distribution de probabilité uniforme





**Figure 6.8:** Résultats d'inversion (de gauche à droite : données synthétiques à inverser, sismo-gramme final et résidus correspondants ; modèle vrai, initial (a priori dans ce cas) et final) pour :  
 En haut, la saturation en eau (Le fluide est constituée d'eau et d'air) ;  
 En bas, le pourcentage volumique en silice, les minéraux étant un mélange de silice et de biotite (sable micacé).

entre ces deux bornes, ce qui pose des problèmes de dépassement de bornes. En effet, la relation entre le modèle et les sismogrammes n'étant pas linéaire, l'actualisation du modèle peut conduire à des valeurs hors bornes. Le calcul direct ne peut plus être résolu dans ce cas. Pour remédier à cela, j'ai utilisé deux solutions :

- Les dépassements de bornes sont évités en assignant la valeur de la borne à tous les paramètres hors limites. Cette méthode, très simple et efficace, pose le problème de donner un modèle qui n'est pas selon la direction de descente maximale  $\gamma$ , mais qui vérifie la décroissance de la fonction coût.

- Une deuxième méthode, beaucoup plus élégante, consiste à effectuer un changement de variable pour obtenir des paramètres ayant une distribution gaussienne (Monteiller et al., 2005; Mora et al., 2006). Le paramètre à inverser pour le fluide est alors  $S'_1$  défini par :

$$\begin{aligned} S'_1 &= \operatorname{Erf}^{-1}(2S_1 - 1) \\ \frac{dS_1}{dS'_1} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-S'^2_1} \end{aligned} \tag{6.2}$$

$\operatorname{Erf}$  désigne la fonction erreur (cf. Annexe A). Dans ce cas,  $S_1$  peut tendre vers ses bornes sans jamais les atteindre et  $S'_1$  peut parcourir tout l'espace des réels. De la même façon,  $T_1$  peut être changé en  $T'_1$ , variable gaussienne.

### Résultats d'inversion

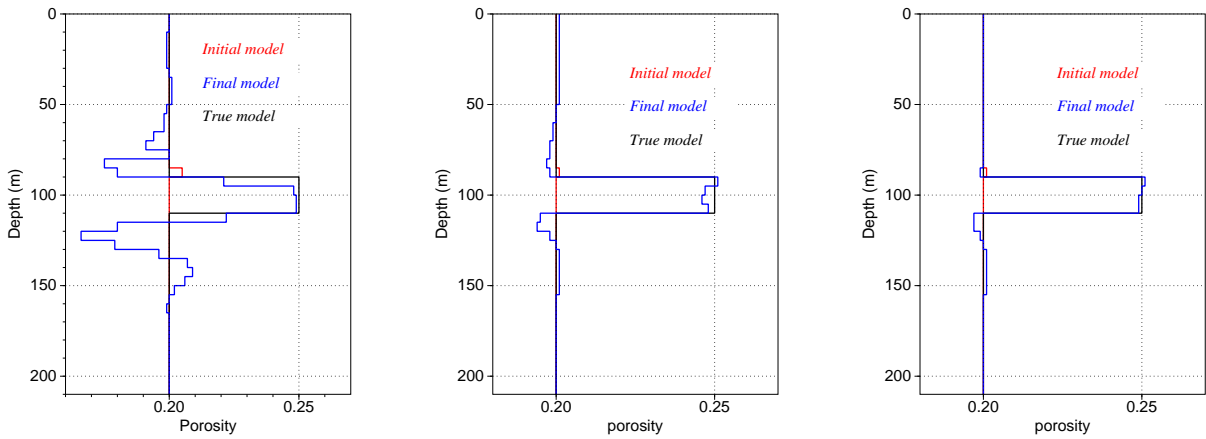
La figure 6.8 présente les résultats d'inversion pour deux modèles construits à partir du modèle de la table 6.2. Le modèle vrai pour tester l'inversion de la saturation a été obtenue en perturbant conjointement  $\rho_f$  et  $K_f$  pour un mélange eau et air. Celui pour le taux  $T_1$  a été créé pour un solide composé de silice et biotite (sable micacé).

Bien que la reconstruction des modèles se dégrade fortement avec la profondeur, les résultats sont très satisfaisants. L'inversion est cependant peu stable, en particulier le modèle *a priori* doit être choisi très proche de la solution pour éviter les minima locaux. L'utilisation d'une matrice de covariance du modèle non diagonale est conseillée pour stabiliser l'inversion.

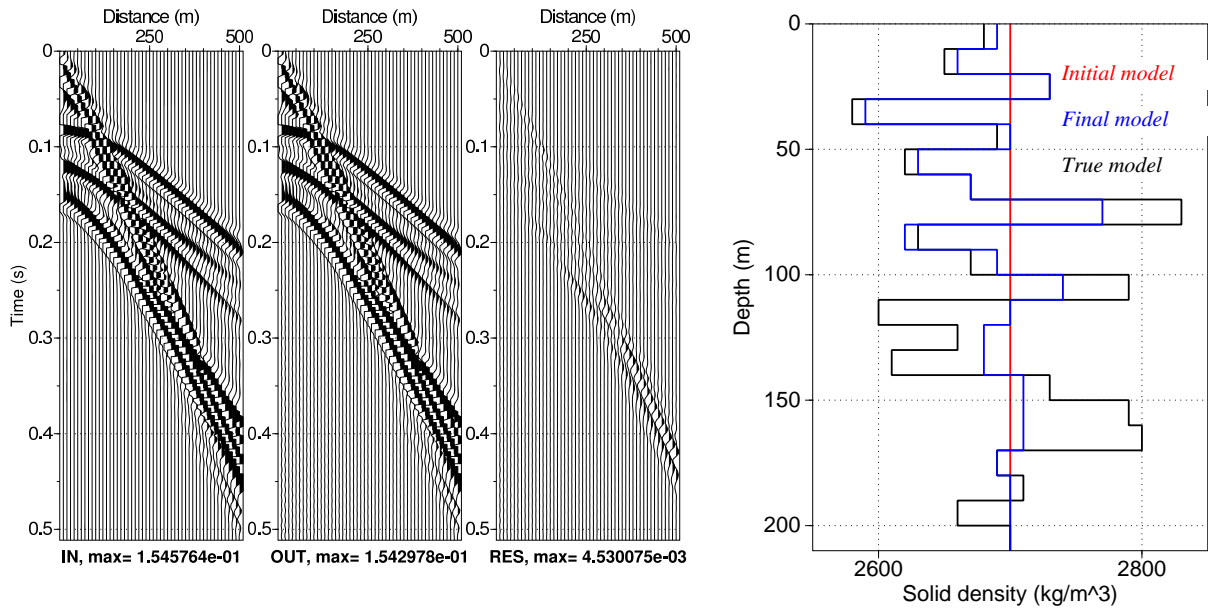
## 6.3 Algorithmes d'inversion et covariances

Dans le chapitre 5, deux algorithmes de résolution du problème inverse ont été présentés : la technique de gradient conjugué et celle de quasi-Newton. Il a aussi été question de l'utilisation de matrices de covariance non diagonale pour les données et pour le modèle, ce qui permet de calculer la fonction coût à partir d'une norme  $H^1$ . L'objet de ce paragraphe est de regarder les différences de résultats obtenus par ces deux techniques et selon les covariances.

Il sera question dans cette partie de l'écart des modèles, qui correspond à l'écart quadratique entre le modèle final et vrai, normalisé par le carré du modèle vrai, et de l'écart des sismogrammes, qui est l'écart quadratique entre le sismogramme à inverser et final sur le carré du sismogramme données.



**Figure 6.9:** Résultats d'inversion (modèles vrais, initiaux (et a priori dans ce cas) et finals) pour la porosité en utilisant un algorithme de gradient conjugué (gauche), de quasi-Newton avec une covariance diagonale (norme  $L^2$ , milieu) ou non (norme  $H^1$ , droite).



**Figure 6.10:** Résultats d'inversion pour la densité par gradient conjugué pour le modèle utilisé dans la figure 6.2c (de gauche à droite : données synthétiques, sismogramme final et résidus correspondants ; modèle vrai, initial (et a priori dans ce cas) et final). Ces résultats sont à comparer avec ceux de la figure 6.2c.

### 6.3.1 Différence entre quasi-Newton et gradient conjugué

Les deux algorithmes d'inversion ont été appliqués sur un modèle créneau simple, dont les caractéristiques sont données dans le tableau 6.1. La figure 6.9 présente les modèles vrais, *a priori* et finals obtenus par la technique de gradient conjugué (droite) et de quasi-Newton (milieu).

Même si les modèles trouvés permettent tous un très bon ajustement des données, le modèle obtenu avec la technique de gradient conjugué est beaucoup plus éloigné du modèle vrai que celui obtenu par quasi-Newton. En effet, il présente des fortes oscillations autour du créneau et une forme en sinus cardinal. Au contraire, la technique de quasi-Newton permet de retrouver presque parfaitement les deux interfaces et l'amplitude du créneau.

Il en est de même pour des modèles plus complexes. En comparant les résultats de la figure 6.10 (gradient conjugué) et 6.2c (quasi-Newton), on constate que la méthode de gradient conjugué conduit à un modèle moins proche du modèle vrai et plus lisse. Les amplitudes des variations du modèle sont mal retrouvées, surtout en profondeur. En contrepartie, le modèle trouvé par les gradients conjugués semble moins dépendant des paramètres de l'inversion, notamment de la covariance.

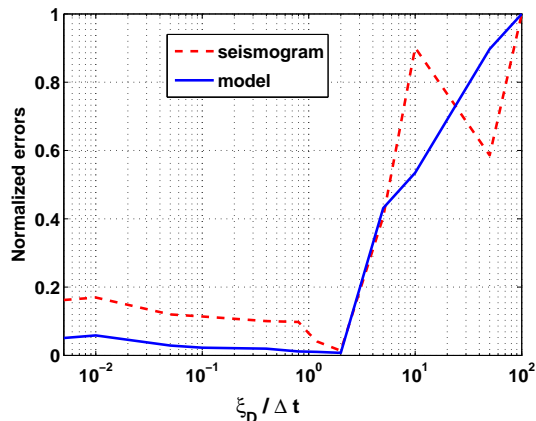
De plus, l'algorithme de quasi-Newton nécessite moins d'itérations que celui par gradient conjugué. En général, une dizaine d'itérations suffit pour atteindre la convergence contre plusieurs dizaines pour le gradient conjugué. Enfin, la configuration en réflexion entraîne un calcul du problème direct relativement coûteux, qui demande beaucoup d'itérations sur les nombres d'ondes  $k$  pour converger. La méthode de quasi-Newton demande au minimum un seul calcul direct par itération de l'inversion, tandis que la technique de gradient conjugué en nécessite au moins trois. Chaque itération est donc plus rapide en utilisant la méthode de quasi-Newton que celle de gradient conjugué.

Ces constatations m'ont conduit à préférer la méthode de quasi-Newton, et à l'utiliser exclusivement.

### 6.3.2 Influence de la covariance des données : norme $L^2$ ou $H^1$

Nous avons vu que deux types de covariance pour les données ont été utilisés : une matrice de covariance diagonale à valeurs constantes et une matrice pseudo-diagonale qui est associée à une norme  $H^1$  pour le calcul de la fonction coût.

L'influence du paramètre  $\xi_D$ , (cf. paragraphe 5.2.5) a été considéré pour l'inversion de la porosité. Le modèle utilisé est une fonction créneau créée à partir du modèle uniforme donné dans la table 6.1. La figure 6.11 présente les écarts des modèles et des sismogrammes en fonction de  $\xi_D/\Delta t$ . Si  $\xi_D/\Delta t$  est inférieur à 1 (matrice presque diagonale), l'algorithme privilégie l'ajustement de l'amplitude des ondes sur celui de la dérivée temporelle de l'amplitude, et inversement si  $\xi_D/\Delta t > 1$  (matrice bande). Sur la figure 6.11, la première valeur, indiquée à  $\xi_D/\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$  correspond à une matrice diagonale pure.



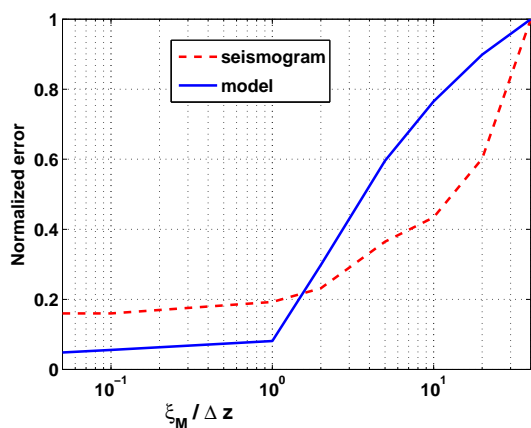
**Figure 6.11:** Variation normalisée de l'écart quadratique entre les données et le sismogramme final (trait pointillé) et entre le modèle vrai et final (trait plein) en fonction de  $\xi_D/\Delta t$ , soit la largeur de la bande diagonale de la matrice de covariance des données.

Les meilleurs résultats d'inversion sont obtenus pour des valeurs de  $\xi_D/dt$  légèrement supérieures à 1. L'ajustement de la dérivée est donc prépondérant mais l'amplitude des ondes garde aussi un poids très important. Lorsque  $\xi_D$  augmente, c'est-à-dire que seul la dérivée des signaux est prise en compte, les résultats d'inversion se dégradent très vite, le modèle trouvé diverge. Au contraire, si seule l'amplitude est majoritairement ajustée, l'inversion est légèrement moins bien contrainte mais totalement acceptable.

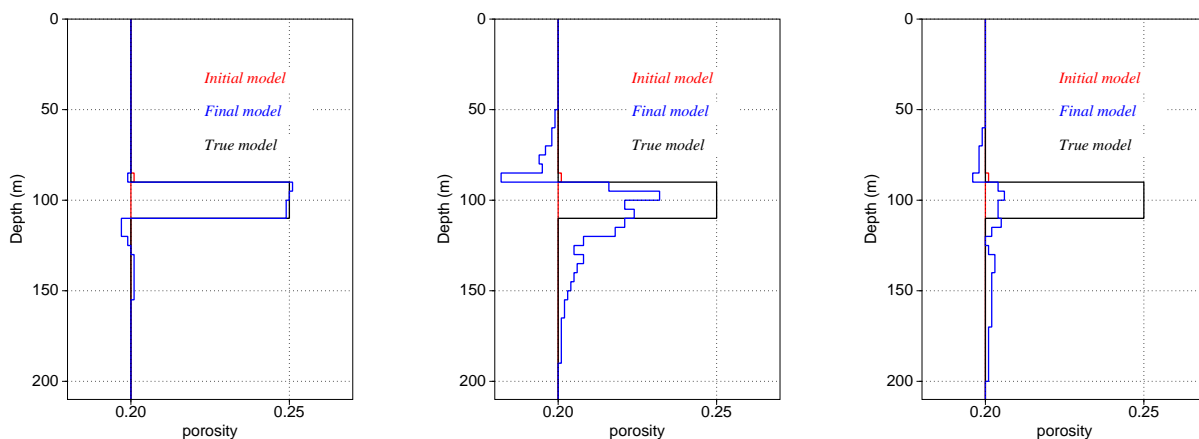
L'utilisation de la norme  $H^1$  permet de reconstruire les interfaces de manière beaucoup plus franches qu'avec la seule norme  $L^2$ , où le modèle peut avoir tendance à osciller. L'information sur la netteté des interfaces est en effet incluse dans la position et l'impulsion des ondes réfléchies et peu dans leur amplitude. En outre, l'amplitude des variations du modèle n'est correcte que si les interfaces sont bien localisées et nettes. Utiliser une matrice de covariance non diagonale est donc bénéfique pour l'inversion. Cela est d'autant plus vrai que le modèle à retrouver est complexe. J'ai donc utilisé ce type de matrice dans la majorité des inversions de ce chapitre.

### 6.3.3 Influence de la covariance du modèle

De même, la matrice de covariance du modèle peut être prise diagonale à valeurs constantes ou pseudo-diagonale (cf. eq. (5.19)). Le paramètre  $\xi_M$  joue sur l'épaisseur de la bande diagonale de la matrice de covariance modèle. Son influence a été étudiée pour retrouver un modèle créneau de porosité. Si  $\xi_M/\Delta z \ll 1$ ,  $\Delta z$  désignant l'épaisseur d'une couche, les différentes couches sont indépendantes. Sinon, l'algorithme cherche à reconstruire à la fois la valeur pour chaque couche et la tendance générale d'évolution du paramètre sur plusieurs couches. La figure 6.12 représente l'erreur sur le modèle et sur les signaux en fonction de  $\xi_M/\Delta z$ .



**Figure 6.12:** Variation normalisée de l'écart quadratique entre les données et le sismogramme final (trait pointillé) et entre le modèle vrai et final (trait plein) en fonction de  $\xi_M/\Delta z$ , soit la largeur de la bande diagonale de la matrice de covariance du modèle.



**Figure 6.13:** Résultats d'inversion (modèles initiaux, vrais et finals) obtenus avec une covariance modèle diagonale (gauche) et non diagonale pour  $\xi_M/\Delta z$  respectivement égal à 5 (milieu) et 20 (droite).

Le modèle est très bien reconstruit pour des valeurs de  $\xi_M/\Delta z$  inférieures à 1 (fig. 6.13, gauche). Quand le contraste de couches est pris en compte, l'inversion conduit à des modèles beaucoup plus lisses (fig. 6.13, milieu). Le modèle reconstruit tend donc vers le modèle uniforme quand  $\xi_M/\Delta z$  est très grand (fig. 6.13, droite).

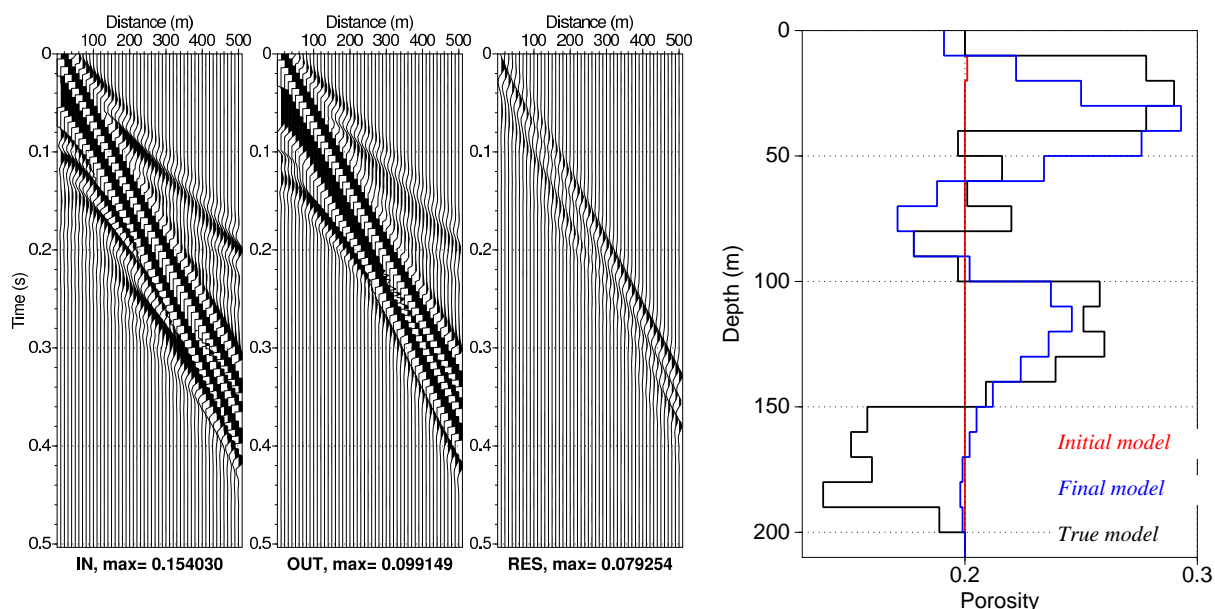
Utiliser une matrice de covariance du modèle non diagonale est donc inintéressant pour reconstruire un modèle créneau, et par extension des modèles avec des variations fortes. En revanche, le modèle à retrouver étant plus lisse, la fonction coût l'est aussi et présente moins de minima locaux. Ce lissage de la fonction coût s'avère très utile pour retrouver des modèles complexes. Il est en général souhaitable de trouver un modèle certain mais peu précis plutôt qu'un modèle contenant beaucoup d'informations mais qui n'est pas la seule solution acceptable. L'utilisation de cette matrice est donc très utile lorsque peu d'information est disponible pour construire le modèle *a priori*. Effectuer une première

inversion avec  $\xi_M/\Delta z > 1$  permet de trouver un modèle lisse pouvant servir de modèle initial pour une nouvelle inversion sans lissage de la fonction coût.

## 6.4 Stratégie d'amélioration de l'inversion

Certains modèles sont difficiles à retrouver. En effet, l'algorithme peut converger sur des modèles non souhaités à cause de minima locaux de la fonction coût. Le sismogramme correspondant peut être relativement éloigné des données.

La première étape pour surmonter cette difficulté consiste à lisser la fonction coût en utilisant une covariance du modèle non diagonale (cf. section 6.3.3). Dans la majorité des cas, cette démarche est suffisante pour retrouver correctement le paramètre recherché.



**Figure 6.14:** Résultats d'inversion pour la porosité (de gauche à droite : modèle vrai, initial (et a priori dans ce cas là) et final; données synthétiques, sismogramme final et résidus correspondants)

Cependant, pour d'autres modèles, les résultats obtenus par ce lissage ne sont pas satisfaisants. Il est alors nécessaire de chercher des stratégies permettant de mieux résoudre ce problème. Par exemple, le modèle de porosité présenté sur la figure 6.14 est mal reconstruit, même avec un lissage de la fonction coût ( $\xi_m = \Delta z$ ). Une des raisons est que le modèle *a priori* est trop éloigné du modèle vrai. Par exemple, pour la seconde couche, la différence entre la porosité du modèle vrai et initial est de 50 %, ce qui entraîne des variations de l'ordre de 15% sur les vitesses.

Pour surmonter ces difficultés, plusieurs techniques sont utilisables : démarrer l'inversion à partir de plusieurs modèles initiaux aléatoires, intégrer l'information des données

par des fenêtrages spatiaux et/ou temporels, utiliser plus d'information en intégrant les ondes de surface, ou ne pas inverser les premières couches du modèle.

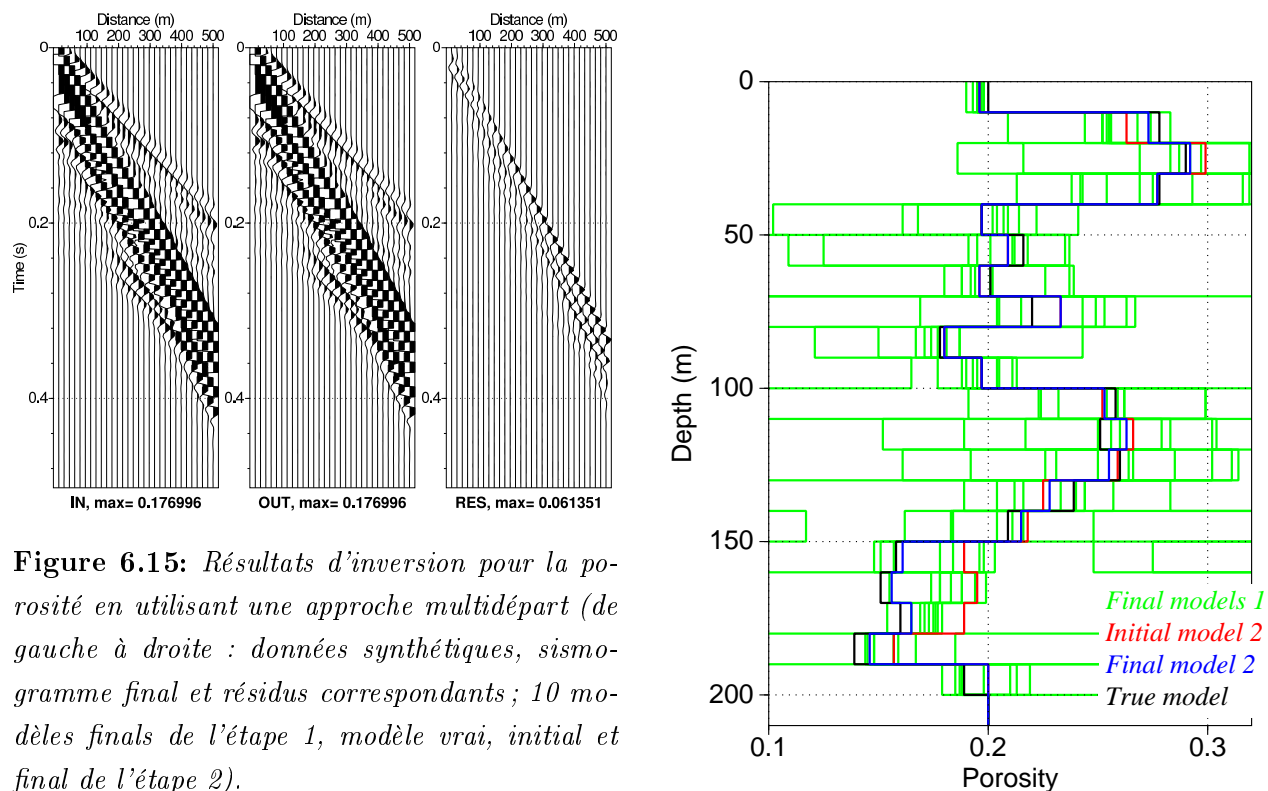
### 6.4.1 Inversion multidépart

J'ai utilisé une approche en deux étapes pour partir de différents modèles initiaux :

1. J'ai construit 10 modèles initiaux en faisant varier aléatoirement la porosité autour du modèle initial de la figure 6.14. Ce modèle lisse reste le modèle *a priori*. Le processus d'inversion est appliqué avec chacun des 10 modèles initiaux, ce qui va donner les 10 modèles de sortie présentés en vert (*final models 1*) sur la figure 6.15. La matrice de covariance du modèle est diagonale. Tous les modèles de sortie sont différents, ce qui montre l'existence de nombreux minima locaux.

Un nouveau modèle (*initial model 2*) est obtenu à partir des 10 modèles obtenus par l'inversion pondérés par l'inverse du coût final. Ce modèle est relativement proche du modèle vrai, mais ne correspond pas à un minimum de la fonction coût.

2. Une nouvelle inversion est effectuée en utilisant ce nouveau modèle comme modèle de départ et modèle *a priori*. Le modèle final est très proche du modèle vrai. En particulier, la dernière étape de ce processus permet de reconstruire les couches inférieures.



**Figure 6.15:** Résultats d'inversion pour la porosité en utilisant une approche multidépart (de gauche à droite : données synthétiques, sismogramme final et résidus correspondants ; 10 modèles finals de l'étape 1, modèle vrai, initial et final de l'étape 2).



Dans l'étape 2, il aurait été plus cohérent de garder le modèle *a priori* utilisé dans l'étape 1, mais les résultats trouvés sont meilleurs avec ce nouveau modèle *a priori*.

La première étape, par la construction aléatoire de modèles, a des similitudes avec les méthodes de Monte Carlo. Cependant, l'exploration de l'espace des modèles n'est pas aléatoire. Le temps de calcul est donc nettement inférieur mais reste la limite à une utilisation systématique de cette méthode. Les résultats obtenus sont cependant très positifs.

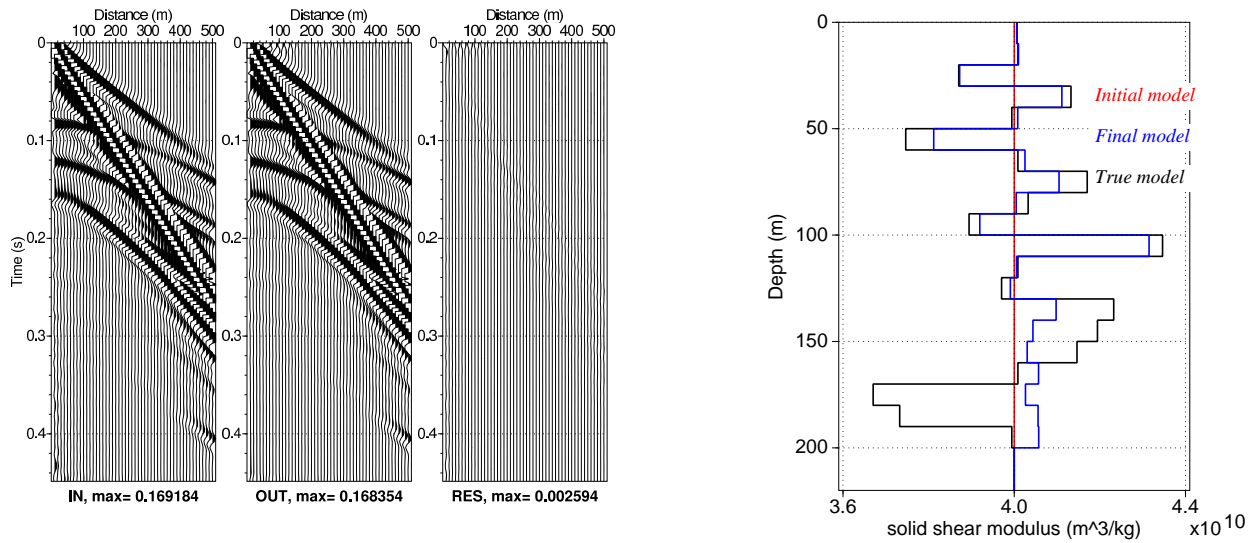
### 6.4.2 Utilisation des ondes de surface

A cause de leur complexité en terrain hétérogène, les ondes de surface sont souvent associées au bruit et éliminées en sismique d'exploration. Jusque là, je ne les ai pas utilisées dans l'inversion en ne considérant pas la surface libre. Or, le code de propagation des ondes, l'approximation de Born et les dérivées de Fréchet sont valables pour les ondes de volume et de surface (Campman et al., 2004; Gélis, 2005).

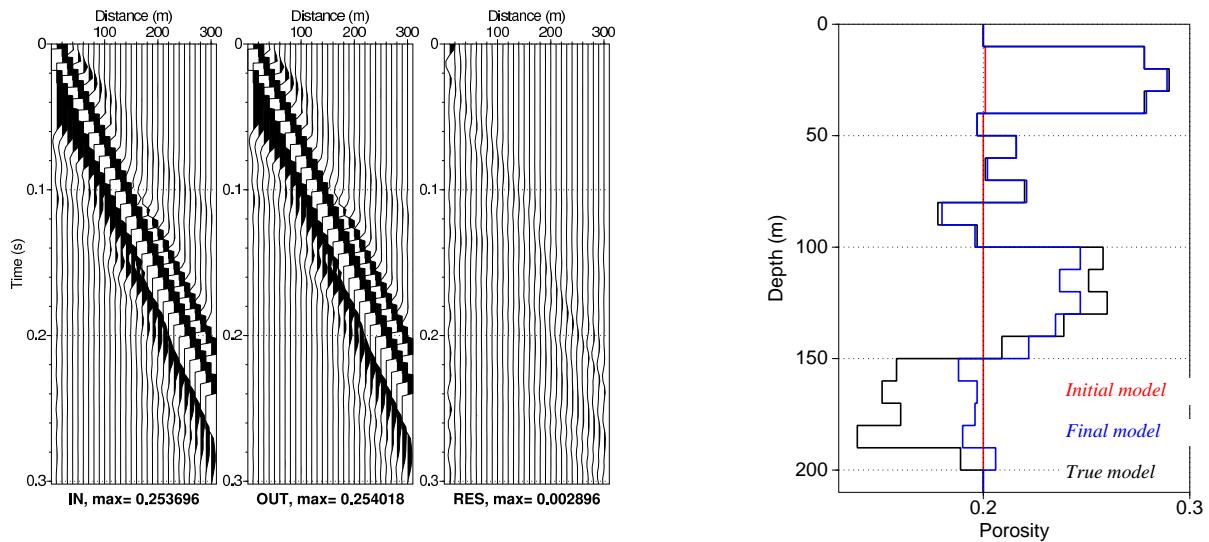
En général, seule la courbe de dispersion des ondes de surface est utilisée pour caractériser un milieu (De Barros et al., 2007, Annexes C). La forme des ondes peut cependant apporter des informations différentes et complémentaires des ondes réfléchies. Leur pénétration est d'environ le tiers de la longueur d'onde, soit un maximum possible d'environ 50 mètres dans la gamme de fréquences et de vitesses sismiques considérée dans ce chapitre. L'information apportée est donc superficielle, ce qui peut permettre de mieux résoudre les premières couches. Des couches superficielles bien retrouvées permettent de mieux reconstruire les couches inférieures. De plus, certains problèmes, comme l'étude des zones non saturées au dessus de nappes phréatiques sont mal résolues par les seules réflexions.

Cependant, l'énergie des ondes de surface est beaucoup plus forte que celle des ondes de volume. Les ondes de surface ont une influence prépondérante et contrôlent la convergence de l'algorithme (Gélis, 2005). Inverser le sismogramme avec les ondes de surface peut bloquer l'accès à l'information portée par les ondes réfléchies sur les couches profondes.

L'inversion des ondes réfléchies avec les ondes de surface a été testée pour plusieurs paramètres. Les résultats d'inversion du module de cisaillement solide de la figure 6.16 sont à comparer avec ceux de la figure 6.2a. Le sismogramme est bien reconstitué, mais les couches inférieures du modèle sont mal reconstruites. Au contraire, la présence des ondes de surface permet de mieux retrouver (cf. fig. 6.17) le modèle de porosité qui posait des problèmes (cf. fig. 6.14). Il est vrai que les valeurs des paramètres dans les couches inférieures restent là aussi mal évaluées.



**Figure 6.16:** Résultats d'inversion (de gauche à droite : données synthétiques, sismogramme final et résidus correspondants, modèle vrai, initial (et a priori dans ce cas) et final) pour le module de cisaillement solide avec des ondes de surface.



**Figure 6.17:** Résultats d'inversion (de gauche à droite : données synthétiques, sismogramme final et résidus correspondants, modèle vrai, initial (et a priori dans ce cas) et final) pour la porosité avec des ondes de surface

Les ondes de surface ont donc deux effets antagonistes : elles rajoutent de l'information et aident l'inversion pour les couches superficielles, mais leur forte énergie masque l'information sur les couches profondes. L'idéal serait d'inverser les ondes de surface et les ondes réfléchies ensemble, en minorant l'amplitude des ondes de surface. Une autre solution pour utiliser les ondes de surface serait d'effectuer une inversion avec ces ondes sur les premières couches du modèle, puis de fixer ces couches et inverser les couches inférieures du modèle.

### 6.4.3 Inversion par temps et offset croissant

Le problème inverse est à la fois sous-déterminé et surdéterminé. De plus, les problèmes d'ambiguïté de phase peuvent conduire à une mauvaise utilisation de l'information disponible et donc à un modèle faux. Pour éviter ces problèmes, qui créent des minima locaux de la fonction coût, il peut être utile d'intégrer progressivement les données dans le code d'inversion.

#### Stratégie

Il est possible de sélectionner les données en fonction de leur déport, en appliquant un *mute* (c'est-à-dire les données sont multipliées par 0 ou 1) ou en n'utilisant pas toute la quantité de données disponibles. Différentes stratégies sont possibles :

- **Déport croissant :**

L'inversion se fait en intégrant progressivement les traces à grand offset. L'intérêt de cette méthode réside dans la détermination des paramètres des couches de la subsurface vers la profondeur. Les erreurs de paramètres sur les couches de surface entraînent de très fortes erreurs sur les couches en profondeur. En contraignant mieux les paramètres des couches supérieures, on s'affranchit des erreurs dans les couches plus profondes (Pratt et al., 1996; Sirgue, 2003).

- **Déport décroissant :**

Les ondes réfractées apparaissent pour des offsets élevés. Elles contiennent des informations sur le modèle plus basses fréquences que les ondes réfléchies. Augmenter le poids des déports lointains en utilisant une pondération croissante des données en fonction de l'offset permet donc de mieux retrouver les grandes longueurs d'ondes du modèle à l'aide des ondes réfractées (Operto et al., 2004).

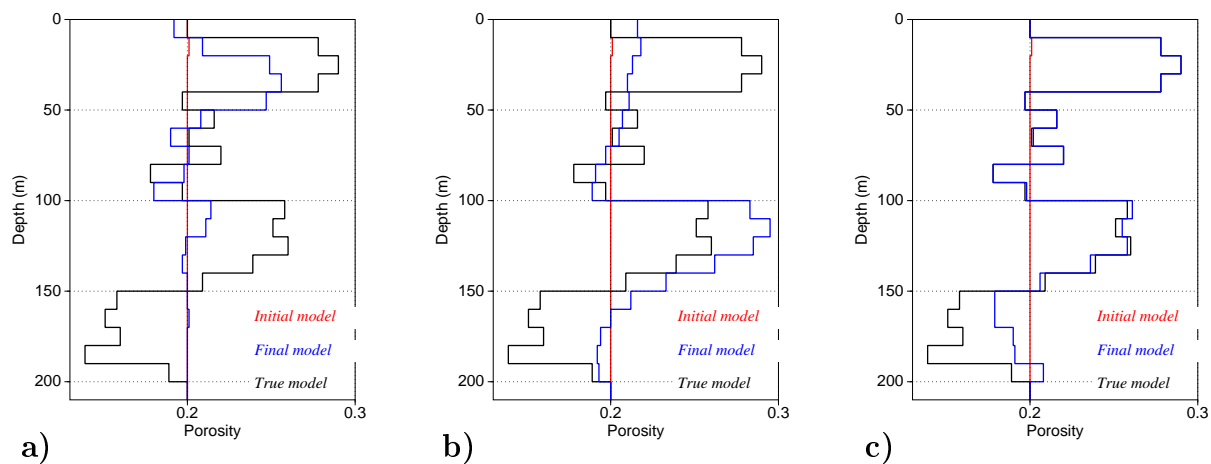
- **Approche mixte :**

Shipp et Singh (2002) imagent une zone de basalte profond en couplant ces techniques. Ils affinent le macromodèle de départ en utilisant les déports lointains et donc les réfractés, puis déterminent les anomalies ponctuelles à partir des déports proches.

L'utilisation des traces à courts déports assure mieux la validité de l'approximation de Born. Sirgue (2003) montrent par une décomposition du gradient en valeurs singulières que les données à grand offset sont davantage non linéaires que les courts offsets. De plus, les données à grands offsets sont sujets à l'ambiguïté de phase. Cependant, l'information sur les zones profondes du modèle est surtout contenue dans les grands offsets.

De même, les données peuvent être intégrées dans l'algorithme d'inversion en sélectionnant à chaque étape une durée de signal plus longue (Gélis, 2005).

La stratégie la plus logique semble donc d'intégrer progressivement les données par dépôts et/ou temps croissant. Ainsi, les couches supérieures du modèle sont mieux reconstruites, puis l'information à grand dépôt et/ou à longue durée, moins énergétique, permet de retrouver les paramètres des couches inférieures.



**Figure 6.18:** Résultats d'inversion (modèle final, initial (et a priori dans ce cas) et vrai) pour la porosité (6.14). Les modèles finals ont été obtenus en intégrant les données par a) temps croissant, b) dépôt croissant et c) temps et dépôt croissants.

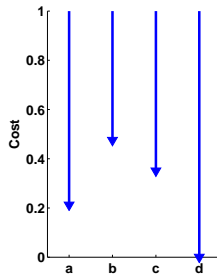
## Résultats

J'ai essayé de reconstruire le modèle de la figure 6.14 en utilisant un fenêtrage par offset croissant, par temps croissant et par temps et offset croissant. Les paramètres d'inversion (covariances,...) sont identiques pour les résultats de la figure 6.18 et 6.14.

Pour les 3 résultats d'inversion de la figure 6.18, les données ont été introduites dans l'inversion en 6 étapes. A chaque étape un processus complet d'inversion est effectué. Les dépôts maximaux utilisés pour les 6 fenêtrages spatiales sont identiques pour les inversions de la figure 6.18b et 6.18c. Il en est de même pour les limites temporelles des figures 6.18a et 6.18c.

La figure 6.19 présente la diminution de la fonction coût entre le début et la fin du processus d'inversion. Les résultats obtenus en effectuant un fenêtrage spatial ou temporel sont moins bons que ceux obtenus directement. Dans le cas du dépôt croissant, la première interface est totalement ignorée et dans le cas du temps croissant elle est très mal localisée. Au contraire en utilisant un temps et offset croissant simultanément, les résultats sont très bons. La fonction coût est divisée par 3000 entre le début et la fin du processus

d'inversion.



**Figure 6.19:** Diminution de la fonction coût  $S$  normalisé par la valeur initiale du coût pour une inversion de la porosité :  
 a) inversion classique (fig. 6.14) ;  
 b) inversion par offset croissant (fig. 6.18, gauche) ;  
 c) inversion par temps croissant (fig. 6.18, milieu) ;  
 d) inversion par temps et offset croissant (fig. 6.18, droite).

Cette méthode a l'inconvénient de dépendre fortement des limites des fenêtres temporelles et spatiales choisies de manière relativement arbitraires. De plus, elle demande de réitérer le processus d'inversion plusieurs fois, ce qui entraîne des temps de calcul longs.

#### 6.4.4 Inversion avec première couche fixée

Pour résoudre correctement ce problème de la figure 6.14, une solution serait d'avoir un modèle *a priori* plus proche du modèle vrai.

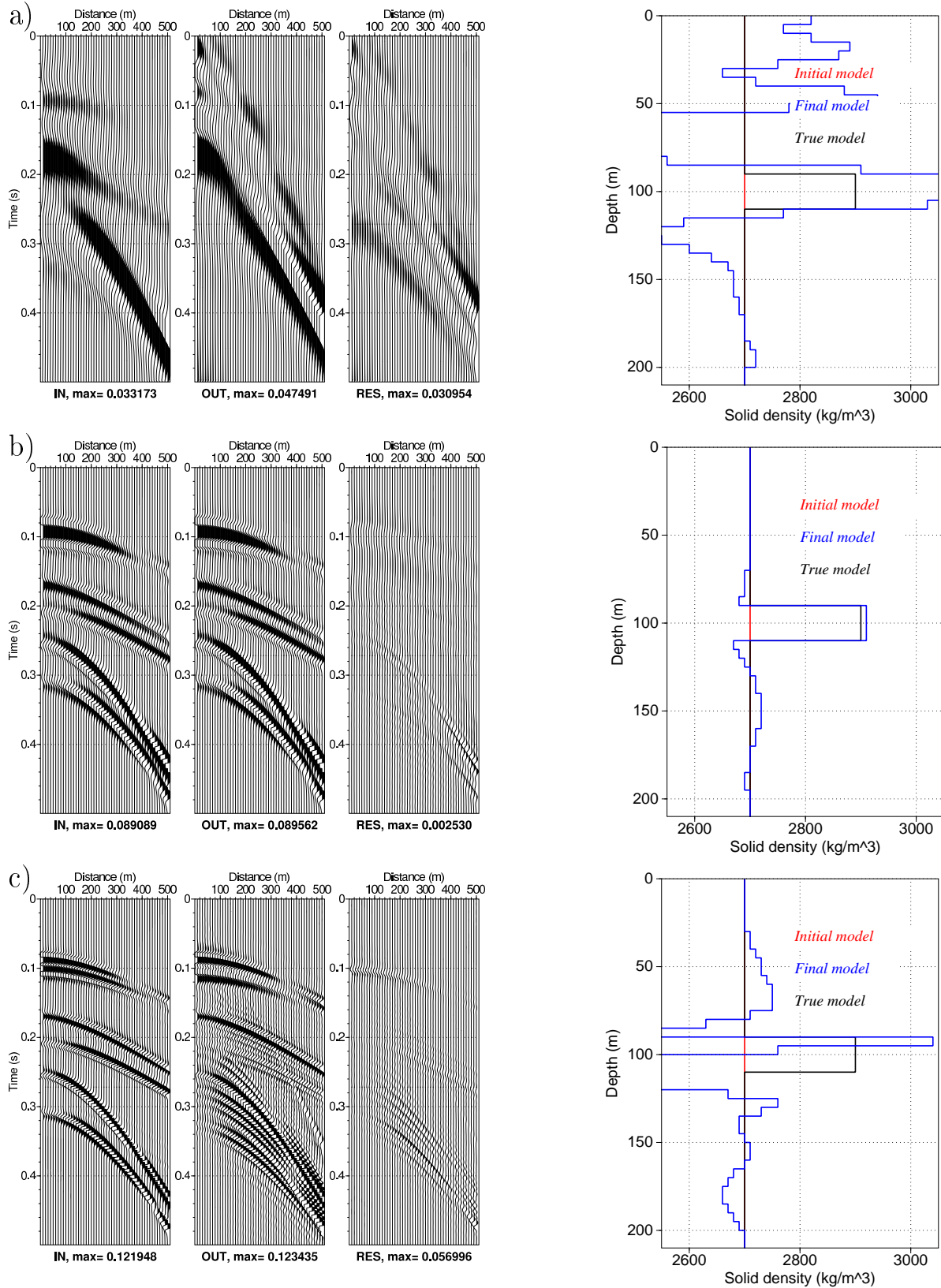
Or, la reconstruction des premières couches du modèle est primordiale. Si ces couches sont mal reconstruites, il est impossible d'arriver à retrouver correctement les couches plus profondes. Une autre solution consiste à imposer les valeurs du modèle pour la première couche et de ne pas inverser ces paramètres. Les paramètres des couches superficielles peuvent être obtenus facilement, en utilisant les vitesses sismiques (ondes réfractées, directes ou de surfaces) ou en effectuant des essais de laboratoire.

La figure 6.20 présente les résultats de l'inversion (sismogramme et modèle) réalisé en imposant la valeur de la première couche. Ces résultats sont nettement meilleurs que ceux obtenus en inversant la première couche (cf. fig. 6.14). En effet, le modèle est très correctement retrouvé, sauf pour les couches profondes.

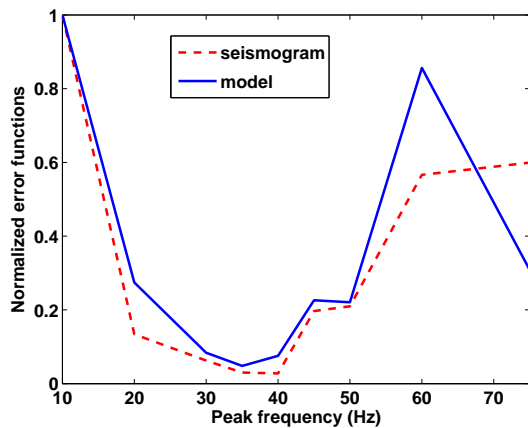
### 6.5 Choix des données et résolution

Cette partie est consacrée aux choix des données et à la résolution qu'elles peuvent fournir. Dans le but de travailler sur des données réelles, il est bon de connaître les caractéristiques de l'acquisition qui permettront de retrouver le meilleur modèle. Sur le terrain, il faut savoir quel offset spatial et combien de traces sismiques sont nécessaires. La gamme de fréquences utilisées conditionne l'épaisseur des couches pouvant être résolues. Enfin, les





**Figure 6.21:** Résultats d'inversion (de gauche à droite : données synthétiques, sismogramme final et résidus correspondants, modèle vrai, initial (et a priori dans ce cas) et final) pour des fréquences centrales de a) 10 Hz , b) 35 Hz et c) 60Hz.



**Figure 6.22:** Variation normalisée de l'écart quadratique entre les données et le sismogramme final (trait pointillé) et entre le modèle vrai et final (trait plein) en fonction de la fréquence centrale du sismogramme à inverser.

le créneau retrouvé pour une fréquence trop haute (fig. 6.21b) est beaucoup trop étroit, des oscillations très fortes non souhaitées apparaissent sur le modèle. Au contraire, les données synthétiques avec une fréquence de 35 Hz permettent de très bien reconstruire le modèle (fig. 6.21c).

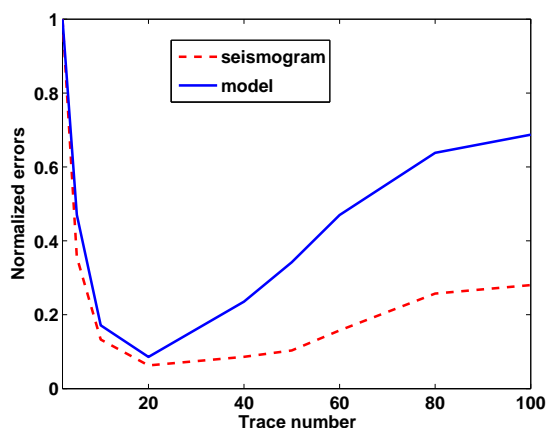
La figure 6.22 présente l'écart des modèles et des données en fonction de la fréquence centrale de la source (signal de Ricker) du sismogramme à inverser. L'inversion est optimale pour des fréquences centrales de 30Hz à 40Hz, correspondant à des longueurs d'ondes de 52 à 70m pour les ondes P et de 18 à 24 m pour les ondes S. Pour les fréquences maximales associées à ces fréquences centrales, les longueurs d'ondes sont de 17 à 23 m pour les ondes P et 6 à 8 m pour les ondes S.

Or l'information contribuant à la reconstruction du modèle est portée à la fois par les ondes P et S. En comparant les valeurs des longueurs d'ondes à l'épaisseur de couches, on trouve que la longueur d'onde minimale pour les ondes P doit être supérieure à 4 fois l'épaisseur des couches. La longueur d'onde minimale pour les ondes S est ici de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche à résoudre. Les longueurs des deux ondes doivent être une fraction de l'épaisseur minimale des couches Dietrich et Kormendi (1990). Dans une géométrie  $P-SV$ , l'épaisseur des couches pouvant être reconstruites est donc conditionnées par les ondes P qui ont des longueurs d'ondes plus grandes que les ondes S. L'inversion des ondes  $SH$  doit donc permettre de reconstituer un modèle plus finement.

### 6.5.2 Influence du nombre de traces

Le problème inverse est à la fois surdéterminé (redondance de certaines informations dans les données) et sous-déterminé (pas assez d'information). Il est donc utile de connaître la quantité d'informations nécessaires, c'est-à-dire le nombre de traces, pour effectuer une inversion correcte à moindre coût. Pour cela, j'ai effectué l'inversion de sismogrammes





**Figure 6.23:** Variation normalisée de l'écart quadratique entre les données et le sismogramme final (trait pointillé) et entre le modèle vrai et final (trait plein) en fonction du nombre de traces du sismogramme à inverser.

ayant un offset maximal de 500 m et la première trace située à 10 mètres de la source. Le nombre de traces varie entre 2 et 100. La figure 6.23 montre que les meilleurs résultats sont obtenus pour un sismogramme ayant 20 traces. En dessous, le nombre de données, bien que très largement supérieur à celui du modèle est insuffisant pour bien contraindre le modèle. Au dessus de 20 traces, le trop grand nombre de données apporte des solutions différentes. Même si les sismogrammes sont bien reconstruits, des oscillations apparaissent sur le modèle, notamment à forte profondeur. Une des raisons à cela est que l'augmentation du nombre de données entraîne une diminution du poids du modèle *a priori* dans la fonction coût. Pour corriger ce problème, il suffit de diminuer la valeur de la matrice de covariance  $\mathbf{C}_M$ .

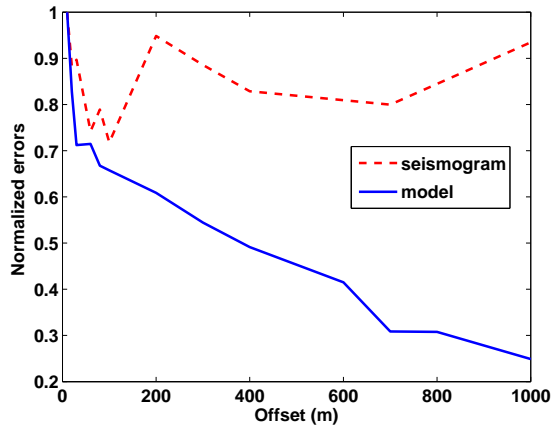
Il est intéressant de noter que les données sont très redondantes. Pour 20 traces, l'espace des données comportent 9200 points contre 40 pour l'espace des modèles dans cet exemple.

En conclusion, avoir beaucoup de données n'est pas forcément utile dans ce type d'inversion.

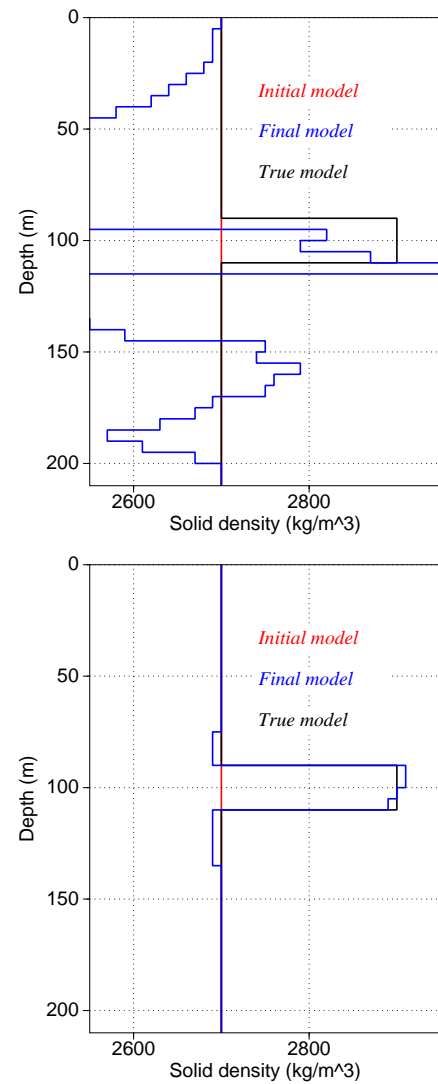
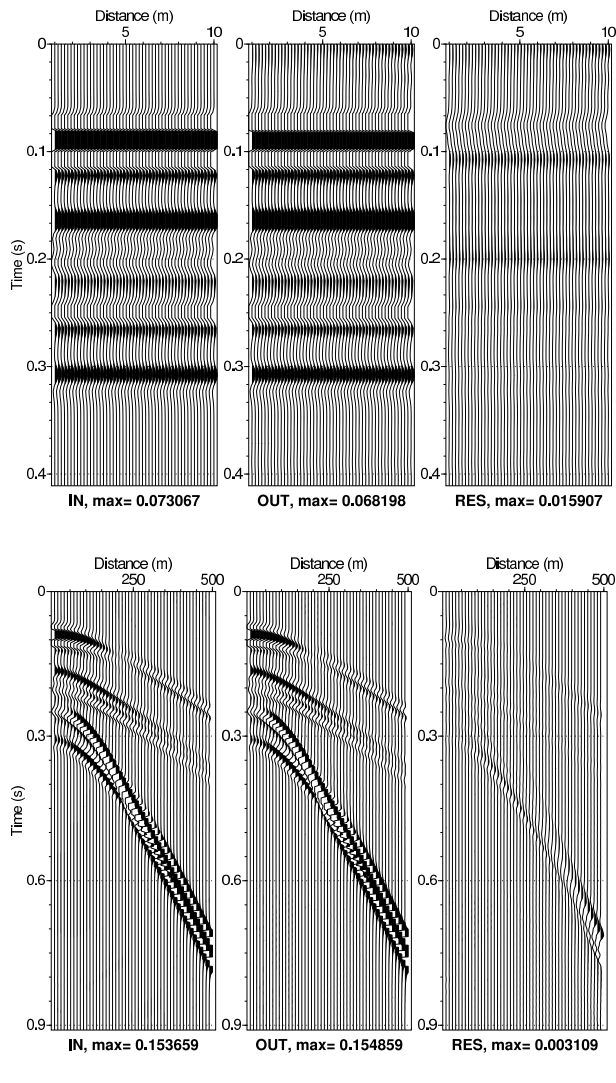
### 6.5.3 Influence du déport maximal des données

L'inversion d'un sismogramme à large offset apporte *a priori* plus d'information que celui à court offset. En effet, les coefficients de réflexion variant avec l'angle d'incidence, les ondes voient leur forme et leur amplitude changer avec l'offset. De plus, les grands déports contiennent les informations sur le modèle profond. Les modèles et les sismogrammes doivent donc être mieux reconstruits pour des sismogrammes à large offset.

Cependant, les données à grand offset sont moins linéaires et l'approximation de Born est moins bien respectée. Des problèmes d'ambiguïté de phase peuvent apparaître. Il existe un minimum de la fonction coût lorsque les ondes des données et du sismogramme calculé



**Figure 6.24:** Variation normalisée de l'écart quadratique entre les données et le sismogramme final (trait pointillé) et entre le modèle vrai et final (trait plein) en fonction de l'offset maximal du sismogramme à inverser.



**Figure 6.25:** Résultats d'inversion (de gauche à droite : données synthétiques, sismogramme final et résidus correspondants ; modèle vrai, initial et final) pour des offsets maximaux de 10m (haut) et 500m (bas).

sont en phase mais décalés d'une période. Delprat-Jannaud et Lailly (2005) montrent ainsi que les données à déport multiple ne contraignent pas toujours mieux les solutions.

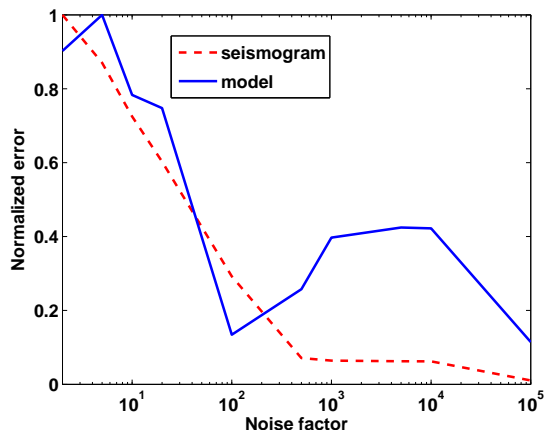
Pour tester cela, j'ai effectué une inversion de la densité solide sur des sismogrammes synthétiques de 50 traces qui balaient une ouverture angulaire différente. Les 50 traces sont réparties régulièrement entre la source et l'offset maximal, qui varie. Le modèle vrai correspond à une "fonction créneau" à 100 m de profondeur (cf. table 6.1).

La figure 6.24 présente l'écart quadratique des sismogrammes et l'écart quadratique des modèles en fonction de l'offset. L'écart sur les sismogrammes reste sensiblement constant lorsque l'offset augmente, tandis que l'erreur sur les modèles diminue fortement avec l'offset. Les sismogrammes sont en effet correctement retrouvés quelque soit l'offset utilisé. La figure 6.25 présente des sorties d'inversion pour des offsets de 10 m et 500m, ce qui correspond à des angles maximaux d'émergence d'environ 3 ° et 68 °.

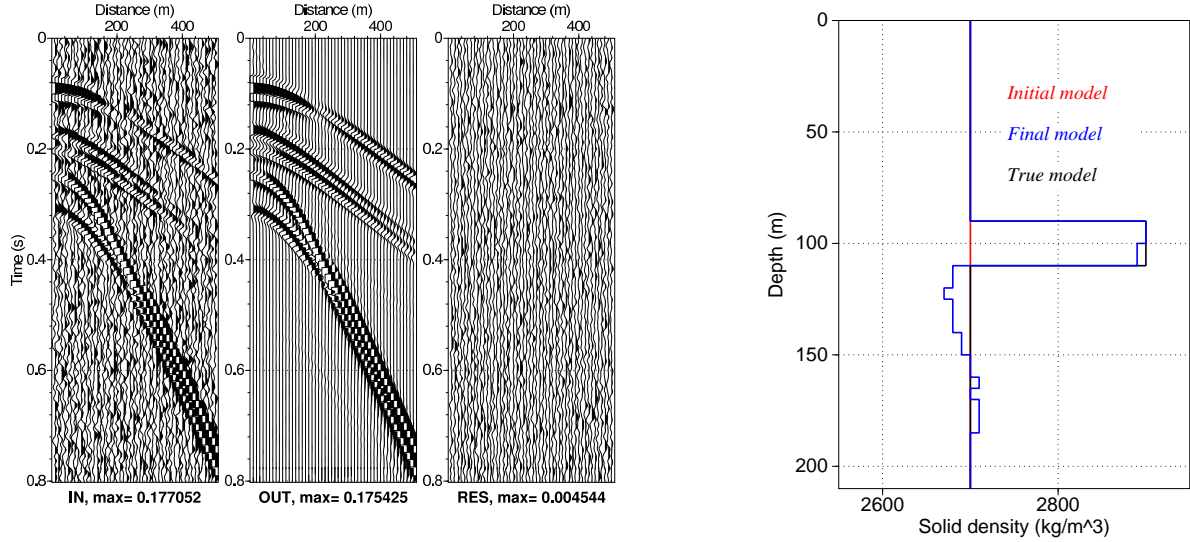
Le modèle associé aux données à court offset est reconstruit par une forme en sinus cardinal, avec des variations de la densité aussi fortes pour les lobes que pour le pic (fig. 6.25). Les modèles sont divergents pour les très faibles offset. A large offset, les oscillations ont disparu et les interfaces sont nettes. L'amplitude du créneau est mieux reconstituée.

Les modèles sont beaucoup mieux reconstruits pour des offsets larges, incluant tous les angles de réflexion, même si les sismogrammes sont bien restitués quelquesoit l'offset maximal. L'offset minimal pour reconstruire correctement le modèle semble être situé autour de 100 m, soit un angle d'émergence maximal des ondes réfléchies de 22°. Utiliser des offsets beaucoup plus large conduit cependant à de meilleurs résultats.

#### 6.5.4 Influence du bruit



**Figure 6.26:** Variation normalisée de l'écart quadratique entre les données et le sismogramme final (trait pointillé) et entre le modèle vrai et final (trait plein) en fonction du facteur de bruit appliqué sur les données  $S_b$ .



**Figure 6.27:** Résultats d'inversion (de gauche à droite : données synthétiques, sismogramme final et résidus correspondants ; modèle vrai, initial et final) pour la densité solide avec un facteur de bruit  $S_b$  sur les données de 100.

Les données réelles sont toujours bruitées, avec du bruit d'origines diverses (vent, activité sismique, vagues, activité humaine ...). Au contraire, les données synthétiques ne sont généralement pas bruitées. Dans l'optique d'inverser des données réelles, il est donc intéressant de tester la stabilité de l'inversion par rapport au bruit. Pour cela, un sismogramme synthétique  $\mathbf{U}_0$  est perturbé en fréquence par du bruit gaussien  $\mathbf{G}_b$  aléatoire. Le nouveau sismogramme  $\mathbf{U}$  est obtenu à partir du sismogramme initial  $\mathbf{U}_0$  par :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \frac{1}{S_b} \frac{\max|\mathbf{U}_0|}{\sqrt{2N}} \mathbf{G}_b \quad (6.3)$$

avec  $N$  l'énergie par échantillon et  $S_b$  le ratio signal sur bruit.

La figure 6.26 présente la variation de l'erreur quadratique des sismogrammes et des modèles. La dernière valeur (indicée  $S_b = 10^5$ ) correspond à l'inversion du signal synthétique non bruité. Un changement notable de comportement a lieu pour des valeurs de  $S_b$  autour de 100 (cf. fig. 6.27). En dessous de cette valeur, le bruit masque les ondes P, moins énergétiques que les ondes S. L'algorithme est incapable de retrouver le sismogramme et le modèle. Au dessus de cette valeur, les sismogrammes sont correctement retrouvés et les modèles reconstruits, même si ces derniers présentent quelques artefacts dus à la présence de bruit.

### 6.5.5 Autres problèmes posés par les données réelles

D'autres difficultés apparaissent lors de l'inversion de données réelles par rapport à l'inversion de sismogrammes synthétiques :

- La fonction source n'est pas connue dans les données réelles, et ne correspond pas à un Ricker. Cependant, la source est considérée connue dans l'inversion. Essayer de

retrouver à la fois la source et les propriétés du modèle s'avère en effet très délicat (Tarantola, 1984a).

- La position des sources et récepteurs n'est qu'imparfaitement connue, ce qui peut entraîner des décalages temporels.
- Les interfaces des milieux géologiques sont rarement plans et horizontaux. En pratique, de faibles variations latérales ou des légers pendages peuvent amener une mauvaise reconstruction des modèles, d'autant plus que le déport des traces est grand.

Enfin, un autre problème dans cette étude a déjà été évoqué dès le chapitre 1. La modélisation des ondes sismiques en milieu poreux utilisée ici n'est pas adaptée à tous les types de matériau. En particulier, elle décrit mal l'atténuation des ondes, et sans doute la forme des ondes. Elle a été écrite pour des sables consolidés à forte porosité, parfaitement isotropes, homogènes et saturés. De nombreux milieux poreux seront donc mal modélisés, ce qui se traduira par des difficultés à inverser les ondes sismiques dans ces matériaux.

## 6.6 Conclusion

L'inversion indépendante des paramètres  $\rho_s$ ,  $\rho_f$ ,  $k_0$ ,  $G_s$ ,  $K_s$ ,  $K_f$ ,  $cs$  et  $\phi$  donne de bons résultats à condition de partir de modèles *a priori* proches de la solution. Il se pose sinon des problèmes de minima locaux et d'instabilités de l'inversion. La perméabilité ne semble pas pouvoir être déterminée par cette méthode. Pour réduire le nombre de paramètres à retrouver, il est possible d'inverser la saturation  $S_i$  en fluide  $i$  et le taux volumique  $T_i$  de minéral  $i$  à l'aide de connaissances *a priori* sur le fluide et les minéraux.

L'inversion multiparamètre pose de sérieux problèmes. En effet, le couplage sismique des différents paramètres entraîne une mauvaise distribution de l'information selon les paramètres.

Deux techniques d'inversion ont été utilisées et comparées : l'algorithme de quasi-Newton semble donner des résultats légèrement meilleurs que celui de gradient conjugué et nécessite de toute manière un temps de calcul plus court. L'utilisation de matrices de covariances non diagonales s'avère très utile. La matrice de covariance des données utilisée, qui est un subterfuge pour utiliser une norme  $H^1$  au lieu de  $L^2$ , améliore l'inversion. De même, la matrice de covariance modèle permet de lisser la fonction coût et d'éviter les minima locaux.

Différentes techniques ont ensuite été utilisées pour améliorer l'inversion. De bons résultats sont obtenus en intégrant progressivement les données par des fenêtres spatio-temporelles de taille croissante ou en effectuant des inversions multidépôts. Fixer les

caractéristiques de la première couche du modèle permet de mieux contraindre le processus. L'utilisation des ondes de surface améliore la reconstruction des couches superficielles mais dégrade celle du modèle en profondeur.

Enfin, dans le but d'inverser des données réelles, l'influence du choix des données a été regardée. L'épaisseur minimale des couches pouvant être résolues est limitée à environ le quart de la longueur d'onde des ondes  $P$  dans le cas  $P - SV$ . Les résultats d'inversion s'améliorent en considérant des offsets très grands. Par contre, il ne semble pas nécessaire d'avoir un grand nombre de traces sismiques. Finalement, l'inversion donne de bons résultats en présence de bruit tant que celui-ci ne couvre pas les ondes les moins énergétiques.



# Chapitre 7

## Application de l’algorithme d’inversion sur des données réelles : Cas d’un milieu poreux côtier, Maguelone (34)

### Sommaire

7.1	Introduction et présentation du site . . . . .	170
7.2	Données et prétraitements . . . . .	174
7.3	Inversion du sismogramme complet . . . . .	178
7.4	Conclusion . . . . .	184

## 7.1 Introduction et présentation du site

### 7.1.1 Localisation du site

Le site choisi pour tester le processus d’inversion est situé sur la commune de Palavas-les-flots, dans le département de l’Hérault (34), à proximité d’un îlot d’origine volcanique (Ambert, 2003). Une bande de terre, large d’une centaine de mètres environ, sépare la mer Méditerranée d’un étang d’eau douce (étang du Prévost, cf. fig. 7.1). Plusieurs forages ont été effectués par l’équipe subsurface du laboratoire *Géosciences Montpellier*. En particulier, les profils sismiques ont été implantés à proximité des sondages *MAG1* et *MAG4*.

Ce site est un objet d’étude du laboratoire *Géosciences Montpellier*, pour caractériser les aquifères côtiers et les entrées d’eau salée en profondeur. En effet, le pompage important d’eau douce au droit de l’agglomération de Montpellier pourrait générer un rabattement





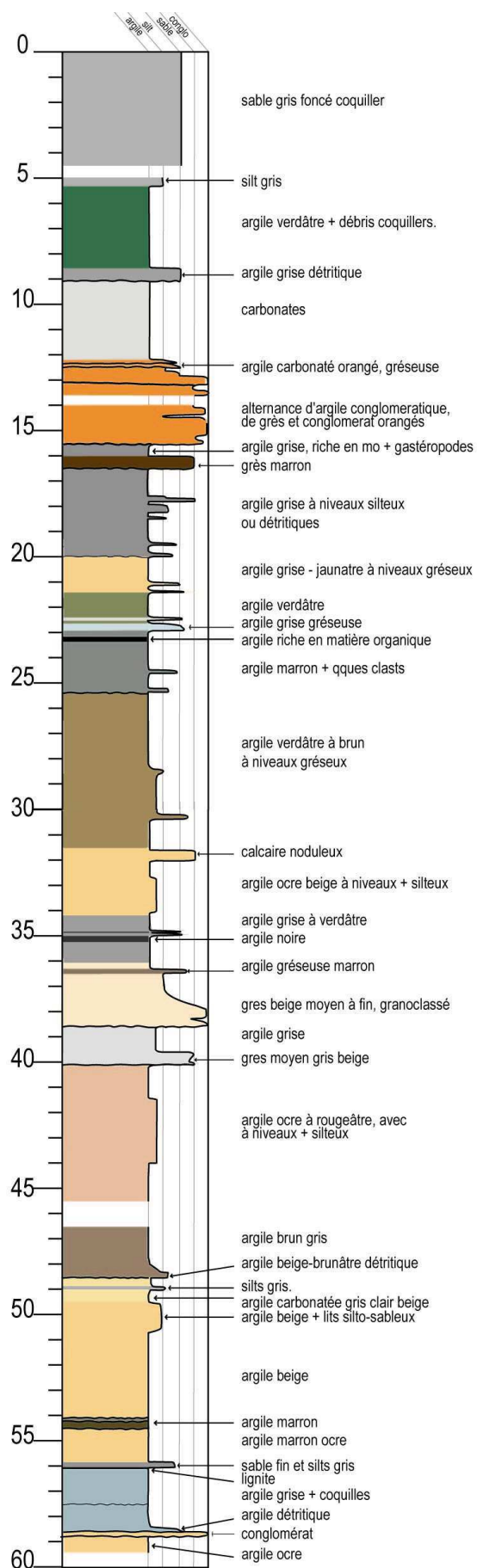
**Figure 7.1:** Plan de situation des profils sismiques (notés  $P1_{PSV}$ ,  $P2_{PSV}$  et  $P_{SH}$ ) et des forages ( $MAG1$  et  $MAG4$ ). Le fond de carte est repris de L'Institut Géographique National.

de la nappe d'eau douce, ce qui entraînerait une intrusion du biseau salin à l'intérieur des terres (Aunay et al., 2006). La proximité de l'étang et de la mer rend le biseau salin plus complexe que pour une côte marine classique. Le forage  $MAG4$ , instrumenté par diagraphies, montre de l'eau saumâtre en surface, puis de l'eau douce. Sur  $MAG1$ , l'eau est toujours douce à 59 m de profondeur, montrant que le biseau salé, s'il est présent en ce point de la côte, n'a pas été recoupé. Le forage  $MAG1$  a par ailleurs été entièrement carotté, ce qui permet d'étudier les processus sédimentaires, et en particulier la façon dont les dépôts d'âge Pliocène et Pléistocène conditionnent la localisation et le fonctionnement des aquifères côtiers. D'autres études de ce type, basées sur des données de forages, de diagraphies et sur des modélisations hydrodynamiques ont été réalisées, notamment dans le Roussillon (Duvail et al., 2005; Aunay et al., 2006).

## 7.1.2 Stratigraphie du site

### Résumé géologique

Le site étudié est situé dans le remplissage sédimentaire d'une paléo-vallée messinienne. La crise de salinité messinienne (5.6-5.32 Ma) est un événement géologique qui correspond à la chute du niveau de la mer Méditerranée de 1500m à la fin du Miocène (Clauzon et al., 1987). Les marges sont incisées par de gigantesques canyons. Cette surface d'érosion se voit très bien en mer sur les profils de sismique pétrolière (Lofi et al., 2005). A la fin de la crise, ces canyons sont ennoyés et remplis progressivement par des sédiments clastiques apportés par les fleuves. Le remplissage de ces canyons se fait pendant toute la durée du Pliocène inférieur. Il est associé à de gigantesques deltas progradants (Gilbert deltas, Clauzon et al., 1987) constitués de dépôts continentaux avec un front sableux et des ar-



**Figure 7.2:** Log stratigraphique préliminaire déterminé à partir du forage MAG1, (réalisé par Johanna Lofi, Laboratoire Géosciences Montpellier)

giles marines dans la partie la plus distale. A partir du Pliocène moyen à supérieur, des cycles d'érosion et dépôts liés aux variations du niveau de la mer viennent complexifier l'organisation sédimentaire de la marge (Rabineau, 2001).

### Log stratigraphique

Lors du forage de *MAG1* et *MAG4*, des données diagaphiques ont été acquises dans les puits par spectrométrie du rayonnement Gamma naturel (GRS) et des mesures de résistivité. Les logs GRS sont des mesures directes de la radioactivité naturelle du sol en Uranium 235, Thorium 232 et Potassium 40. Ils apportent des informations directement interprétables en termes de lithologie et en particulier des couches argileuses qui fixent préférentiellement ces éléments radioactifs. La caractérisation visuelle des carottes extraites de *MAG1* ajoutée à ces informations ont permis de déterminer une première ébauche de la stratigraphie du site, donnée sur la figure 7.2 et réalisée par J. Lofi.

De 0 à 9 mètres se trouvent des sédiments récents (Holocène supérieur, moins de 6000 ans), avec des sables de cordon littoral et des argiles vertes lagunaires. Vers 9 mètres, une discordance (surface d'érosion) sépare ces sédiments postérieurs aux derniers âges glaciaires des terrains Pliocène vieux d'au moins 3.8 millions d'années (Ambert, 2003). Ces séries sédimentaires relativement homogènes sont essentiellement d'origine continentale, avec des alternances d'argiles et de silts marrons. Les premières études suggèrent qu'elles se sont déposées dans des plaines deltaïques, avec localement quelques influences marines (coquilles marines vers 51 m et entre 56 et 59 m par exemple). Entre 12.5 et 15.5 m, un niveau conglomératique d'origine fluviale se voit très bien sur les données de GRS. Un autre niveau gréseux est visible vers 38m et pourrait correspondre à un faciès de plage.

La stratigraphie de *MAG1* montre que, sous une couche de sable superficielle, des couches d'argile alternent avec des couches gréseuses ou conglomératiques. La minéralogie est complexe, avec la présence de minéraux argileux, carbonatés et siliceux. A la vue de ce log, les principaux réflecteurs sismiques devraient être situés autour de 5,5 m, 9m, de 12,5m à 16m et entre 37 et 40m.

### 7.1.3 Mesures sismiques : Intérêts et dispositifs

Lors des forages de *MAG1* et *MAG4*, les faciès lithologiques ont été localisés à des profondeurs similaires. A première vue, le milieu peut donc être considéré comme tabulaire. La proximité entre l'étang et les profils sismiques rend acceptable l'hypothèse de milieu saturé. Enfin, la porosité importante du milieu rend ce site intéressant pour cette étude. Le sondage carotté *MAG1* permettra à terme de mesurer les variations de porosité et de paramètres mécaniques avec la profondeur. Ces données ne sont malheureusement

pas encore disponibles et ne seront pas intégrées au moment de la rédaction de cette thèse.

Les principales caractéristiques souhaitées pour tester le processus d'inversion sont réunies : il s'agit d'un milieu poreux tabulaire et saturé, avec des logs de porosité et mécaniques.

Trois profils sismiques ont été réalisés (cf. fig. 7.1) :

- Le profil  $P1_{PSV}$  est situé exactement entre les forages  $MAG1$  et  $MAG4$ . 46 capteurs verticaux sont espacés de 1m et la source est un coup de marteau vertical à 10 m du premier et du dernier capteur.
- Les capteurs horizontaux du profil  $P_{SH}$  ont été disposé au même endroit que ceux du profil  $P1_{PSV}$ , de façon à enregistrer les déplacements orthogonaux à la direction du profil. La source (coup de marteau donné latéralement sur un madrier) est localisée à 2 mètres des capteurs extrêmes du profil.
- Le profil  $P2_{PSV}$  est situé sur une bande sableuse, dénué de végétation, à environ 50 mètres de  $MAG4$ . Les 24 géophones, espacés de 3m, enregistrent le mouvement vertical. La source verticale est située à 10 mètres des capteurs extrêmes.

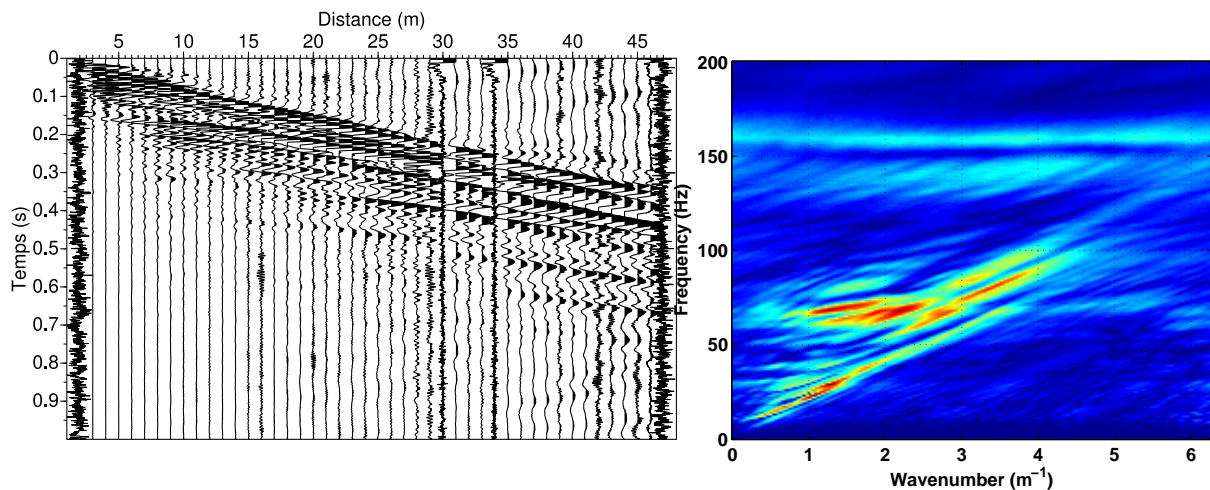
Toutes ces données ont été enregistrées sur 1 seconde, avec une fréquence d'échantillonnage de 2000 Hz.

## 7.2 Données et prétraitements

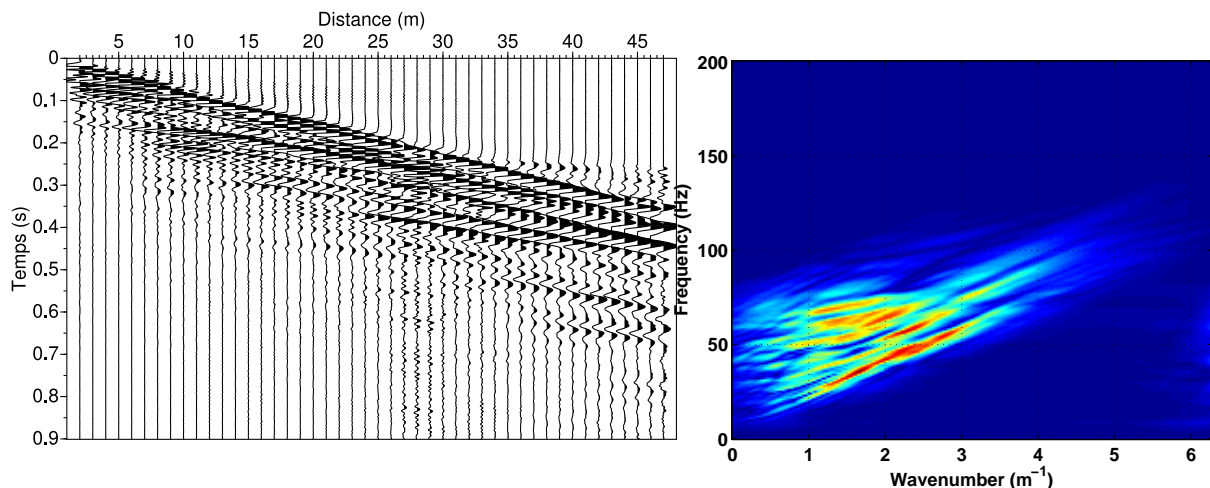
### 7.2.1 Traitement des données

La première étape du prétraitement a consisté à filtrer les données à la fois dans l'espace temps-distance (“*mute*”) et dans l'espace fréquence-nombre d'ondes. En particulier, des ondes générées par les vagues arrivent latéralement sur le profil. Ce bruit est facilement éliminé dans le domaine f-k (cf. fig. 7.3 et 7.4).

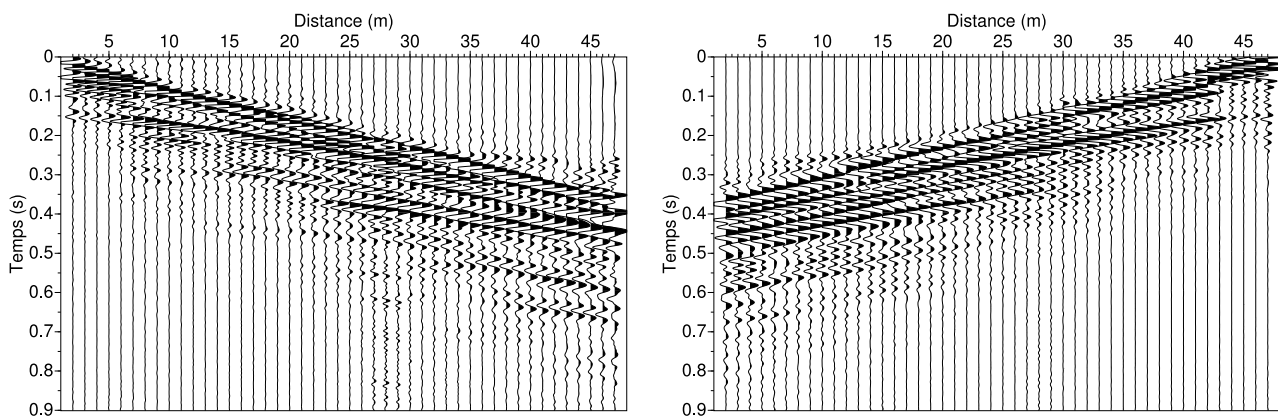
La source est un coup de marteau et sa signature n'est pas connue. Même si la fonction de Ricker utilisée dans la modélisation en est proche, il est intéressant de mieux contrôler la source. Pour cela, j'ai normalisé le spectre de chaque trace par le spectre de la première trace. Ce spectre est la meilleure estimation disponible de celui de la source. La phase du signal n'est pas modifiée. Cette “déconvolution” conduit à étendre la source en fréquence, et à la faire tendre vers un dirac en temps. Il suffit ensuite de convoluer le sismogramme obtenu par un Ricker de fréquence connue. Le résultat de ces traitements est montré pour le profil  $P_{SH}$  dans la figure 7.5. Même si ce traitement est physiquement incorrect, il



**Figure 7.3:** Sismogramme enregistré (gauche), transposé dans le domaine fréquence-nombre d'ondes (droite), avant tout traitement. Il a été enregistré avec une géométrie SH (profil  $P_{SH}$ ). La bande claire située entre 160 et 180Hz est associée au bruit électronique des traces 1 (2m), 29 (30m), 33 (34m) et 46 (47m). Chaque trace est normalisée par le maximum de son amplitude pour la visualisation.



**Figure 7.4:** Données de la figure 7.3 (domaine temps-distance (gauche) et fréquence-nombre d'ondes (droite)), après filtrage dans le domaine fréquence-nombre d'ondes.

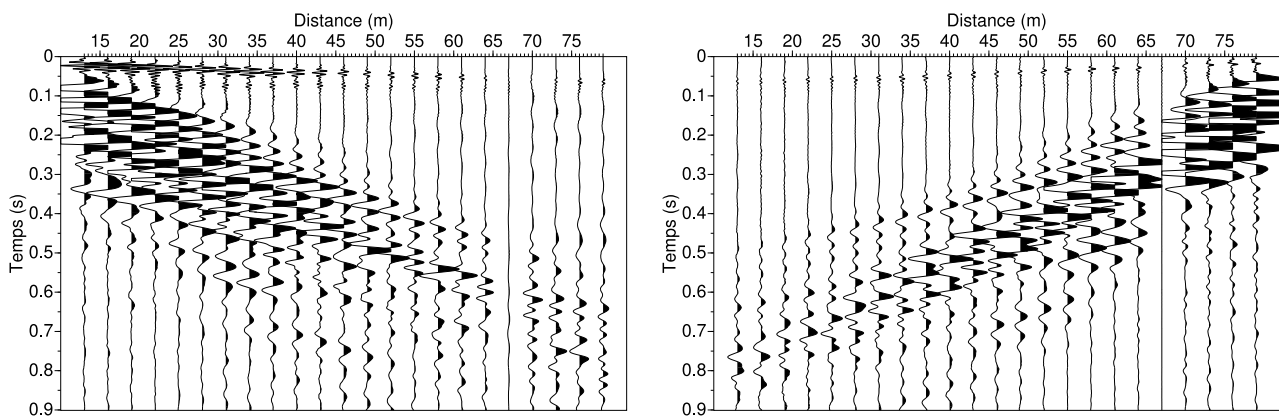


**Figure 7.5:** Sismogramme de la figure 7.4 après normalisation des spectres et convolution par un Ricker. A droite, données obtenues avec tir inverse et traitements identiques.

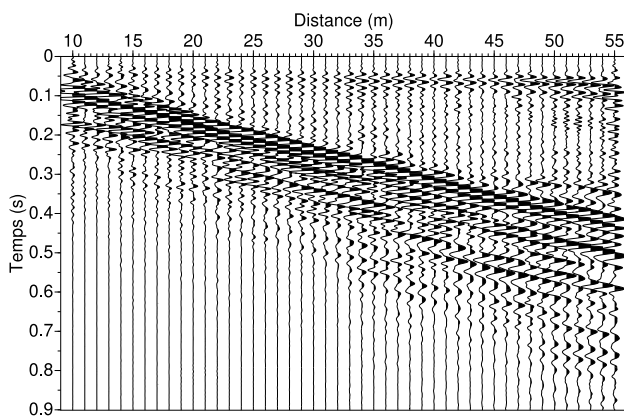
semble ne pas dégrader le sismogramme et améliorer la source.

Enfin, les sismogrammes sont filtrés par un filtre passe-bande pour ne conserver que la gamme où le rapport signal sur bruit est bon. Les géophones enregistrent des vitesses de déplacements. Pour pouvoir les comparer aux modélisations directes, j'ai donc temporellement intégré les sismogrammes.

## 7.2.2 Données brutes et traitées



**Figure 7.6:** *Sismogrammes mesurés par le profil  $P2_{PSV}$  après un filtrage dans le domaine fréquence-nombre d'ondes. La fréquence maximale est de 180Hz. L'intertrace est de 3m, avec un offset de 10 m. La première trace (10m) et la vingtième (67m) sont nulles.*



**Figure 7.7:** *Sismogramme mesuré par le profil  $P1_{PSV}$  après un traitement identique à celui appliqué sur les sismogrammes de la figure 7.6, avec une fréquence maximale de 180Hz. L'intertrace est de 1m, avec un offset minimal par rapport à la source de 10m. Pour la visualisation, chaque trace est normalisée par le maximum de son amplitude.*

### Analyse visuelle des données

Les figures 7.6 et 7.7 montrent les sismogrammes enregistrés par les profils sismiques

$P1_{PSV}$  et  $P2_{PSV}$  après un filtrage dans le domaine f-k. La fréquence maximale est de 180 Hz dans les deux cas.

Les données, brutes ou après traitement, montrent très peu de hautes fréquences. En particulier, les ondes S et les ondes de surface des sismogrammes 7.6 sont beaucoup plus basses fréquences que le sismogramme 7.7. Cet effet est certainement dû aux matériaux limoneux très déconsolidés en surface du profil  $P2_{PSV}$ .

Les figures 7.3 et 7.4 (profil  $P_{SH}$ ) montrent qu'il y a très peu d'énergie cohérente pour des fréquences supérieures à 100Hz. Le bruit étant très important de 60 à 100 Hz, j'ai choisi de ne garder que les fréquences inférieures à 60 Hz.

Le milieu semble très atténuant pour les hautes fréquences, et la source ne génère pas des hautes fréquences suffisamment énergétiques.

Il ne paraît pas exister d'onde de Love sur les sismogrammes  $SH$  (fig. 7.5). Par contre, des ondes de Rayleigh très énergétiques viennent masquer les ondes S réfléchies sur les profils  $P - SV$  (fig. 7.6).

Les données brutes en particulier pour le profil  $P_{SH}$  (7.3, gauche) montrent plusieurs réflexions. Cependant, seules les premières réflexions sont visibles. Plusieurs interprétations peuvent expliquer l'absence de réflexions profondes. Tout d'abord, il est possible qu'il n'existe que peu de réflecteurs en profondeur. Ensuite, le milieu étant très fortement atténuant, l'excitation sismique générée par le coup de marteau n'est certainement pas assez énergétique. Cependant, la somme de plusieurs réponses sismiques associées à des sources identiques n'apportent pas d'informations supplémentaires.

On voit sur les figures 7.5 et 7.7 que les réponses des tirs aller et retour sont bien symétriques. L'hypothèse d'un milieu tabulaire semble donc respecté.

### Efficacité du traitement

Le traitement effectué semble efficace. Le bruit est en grande partie supprimée par le filtrage dans le domaine fréquence-nombre d'ondes. La normalisation des spectres et la reconvolution par un Ricker modifie peu l'allure du sismogramme. La source est certainement très mal corrigée par cette méthode, mais l'atténuation et la forme des ondes semblent être conservées.

### Réflexion, réfraction et ondes de surface

Tout d'abord, j'ai voulu connaître une estimation des vitesses des ondes enregistrées. Pour cela, j'ai utilisé la courbure des hyperboles de réflexion. Les ondes S ont des vitesses extrêmement lentes en surface, de l'ordre de 115 m/s. Au contraire, la vitesse des ondes

P est relativement rapide, avec des vitesses supérieures à celle dans l'eau d'environ 1650 m/s en surface. Le terrain est donc très faiblement consolidé et totalement saturé.

Les sismogrammes mesurés avec le profil  $P_{SH}$  montrent des ondes réfractées, permettant également de mesurer les vitesses sismiques. En pointant les temps de première arrivée, on trouve une vitesse moyenne de 130 m/s sur les premiers 12 mètres, puis une vitesse de 430 m/s en dessous. En analysant simultanément deux tirs inverses, l'interface située à 12 mètres est légèrement pentée vers l'est, avec une pente d'environ 3%. L'hypothèse d'un milieu tabulaire reste acceptable avec cette pente (Moinet, 1997).

L'analyse des vitesses de phase des ondes de Rayleigh, pour le profil  $P1_{PSV}$  (cf. fig. 7.6) montre une légère diminution de la vitesse des ondes S dans les premiers mètres, puis une augmentation autour de 10 mètres de profondeur.

## 7.3 Inversion du sismogramme complet

### 7.3.1 Modèle de départ

La connaissance approximative des vitesses sismiques et l'estimation imparfaite des paramètres du minéral ne suffisent pas à avoir une première idée du modèle. En effet, il reste une ambiguïté entre la porosité et la consolidation. Une porosité de 30% associée à une consolidation de 1500 ajuste aussi bien les vitesses qu'une porosité de 40% et une consolidation de 900, avec un très léger arrangement des paramètres du solide.

$\phi$	$k_0$ ( $m^2$ )	$\rho_f$ ( $kg/m^3$ )	$\rho_s$ ( $kg/m^3$ )	$K_s$ ( $GPa$ )	$cs$	$G_s$ ( $GPa$ )	$K_f$ ( $GPa$ )	$\eta_f$ ( $Pa.s$ )
0.4	$10^{-12}$	1000	2700	37	1000	34	2.2	0.001

**Table 7.1:** *Un modèle lisse utilisé comme départ de l'inversion*

J'ai donc essayé plusieurs modèles de départs : des modèles lisses, comme celui donnée dans le tableau 7.1, ou des plus complexes (modèles bicouches estimés à partir des ondes réfractés, modèles à gradients). Le choix du modèle de départ est crucial pour l'inversion, mais est très dur à obtenir en termes de paramètres poro-élastiques.



### 7.3.2 Données, fréquences et stratégies

L'inversion du profil  $P_{SH}$  est plus simple que l'inversion des profils enregistrés avec une géométrie  $P-SV$ , et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, les ondes de Love sont dans ce cas là absentes ou très peu énergétiques, contrairement aux ondes de Rayleigh dans les enregistrements verticaux qui viennent masquer les ondes réfléchies. Ensuite le nombre de paramètres à déterminer est de 4 pour le profil  $SH$ , et de 5 pour le profil  $P-SV$  en considérant le milieu saturé. Les ondes S ne dépendent pas du module de compressibilité  $K_s$ .

Les sismogrammes synthétiques ne sont pas causaux. En effet, les fonctions de Green sont convoluées par un Ricker. De l'énergie arrive donc avant le temps zéro. Pour remédier à ce problème, je décale durant l'inversion les sismogrammes de la demi-période du Ricker calculée à la fréquence pic.

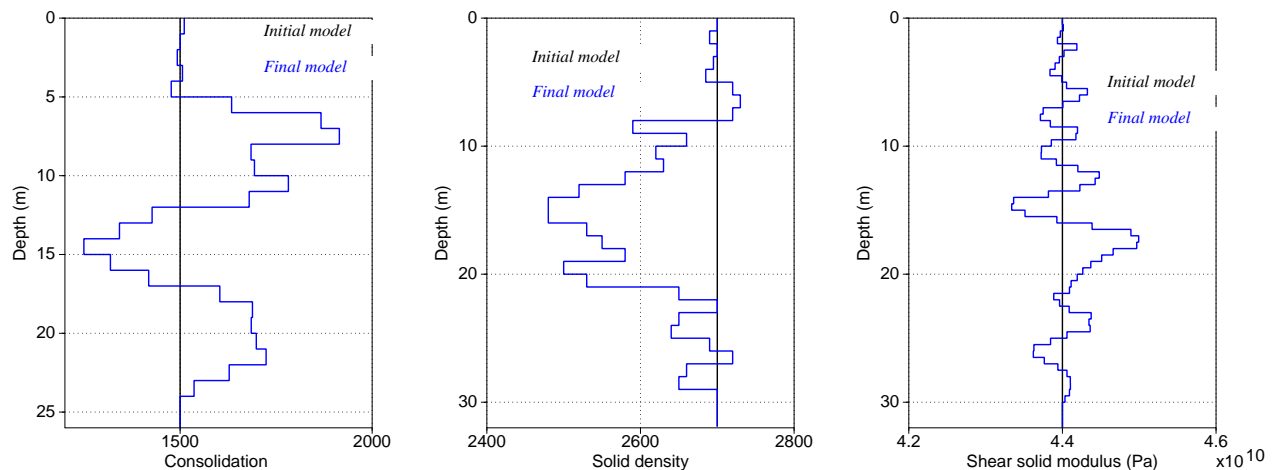
Il n'y a que très peu d'énergie cohérente pour des fréquences supérieures à 100 Hz et un rapport signal sur bruit faible pour les fréquences supérieures à 60 Hz (cf. fig. 7.4). Je me suis donc limité à cette fréquence pour l'inversion des profils  $SH$ . Les longueurs d'ondes minimales sont de 2 mètres pour une vitesse de 120 m/s. La résolution minimale espérée est de 0.5 à 1 mètre.

La présence de l'onde directe sur les sismogrammes oblige à calculer celle-ci dans l'inversion. Il est aussi nécessaire de considérer la surface libre.

### 7.3.3 Résultats d'inversion

Dans les chapitres 5 et 6, j'ai montré que le couplage entre paramètres rendait impossible l'inversion simultanée de plusieurs paramètres. Or, dans le cas  $SH$ , en supposant le milieu saturé, 4 paramètres sont à déterminer : la porosité, le module de cisaillement solide, la densité du minéral et la consolidation. La perméabilité est considérée comme indéterminable. L'augmentation de la consolidation, de la porosité et de la densité solide, ou la diminution de  $G_s$  sont associées à des diminutions de la vitesse des ondes S (cf. chap. 1).

Plusieurs stratégies méritent d'être essayées pour extraire l'information du sismogramme. Les résultats d'une inversion simultanée ou indépendante des différents paramètres peuvent être intéressants. J'ai tout d'abord essayé de partir d'un modèle uniforme, estimé à partir des vitesses sismiques en surface. Je me suis ainsi volontairement placé dans le cas défavorable où aucune information n'est disponible sur le modèle.



**Figure 7.8:** Résultats d'inversion monoparamètre : modèle initial (noir) et final(bleu) pour la consolidation  $cs$ , la densité solide  $\rho_s$  et le module de cisaillement du minéral  $G_s$ .

### Inversion d'un unique paramètre

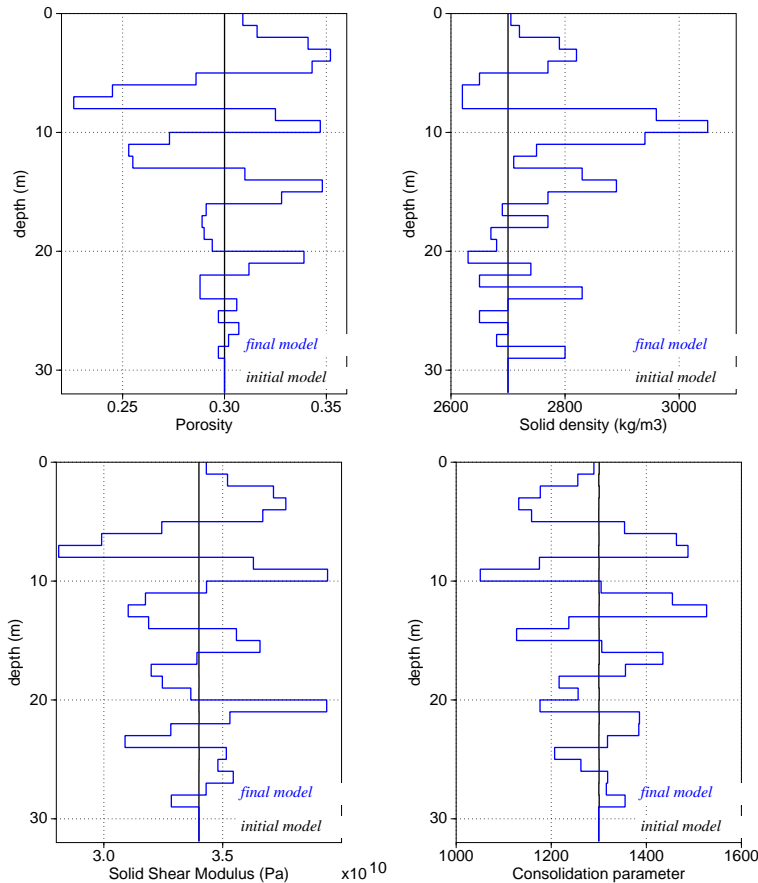
Dans le cas où un seul paramètre est reconstruit, les variations obtenues vont inclure l'information contenue dans les variations réelles des autres paramètres. La figure 7.8 présente les variations de la densité solide, de la consolidation et du module de cisaillement en supposant dans chaque cas les autres paramètres constants et connus.

La résolution verticale pour la consolidation et la densité solide est de 1 mètre. Ces deux paramètres montrent une couche à vitesse homogène jusqu'à 5 mètres, puis une diminution de vitesse jusqu'à 9 mètres.  $\rho_s$  diminue sur 1 mètre, tandis que  $cs$  diminue sur 2 mètres, ce qui correspond dans les deux cas à une augmentation de vitesse. La vitesse diminue de nouveau jusqu'à 12 mètres de profondeur puis est plus forte jusqu'à 16-17 mètres. Tandis que la consolidation augmente jusqu'à 25 mètres sans interfaces marquées, la densité augmente sauf pour des couches situées entre 19 et 21 mètres, 23 et 25 mètres, et 27 et 29 mètres.

Le module de cisaillement solide varie autour de la valeur du modèle a priori, sans s'en éloigner. La résolution est ici de 0,5 mètre. Des interfaces associées à une augmentation de vitesse sont localisées à 2,5, 5,5, 8,5, 11,5, 16 et 23 mètres. Inversement, les interfaces correspondant à des diminutions de vitesse sont situées à 3, 6,5, 9,5, 13,5, 18 et 25 mètres.

Il y a certaines cohérences avec le log stratigraphique et les modèles de densité et consolidation : la couche raide située autour de 9 mètres de profondeur, l'augmentation de vitesse à 12 mètres... Cependant, les vitesses correspondant à ces valeurs sont certainement éloignées de celles retrouvées, ce qui décrédibilise les profondeurs obtenues. Dans ces trois cas, les contrastes très forts pouvant exister entre l'argile et les grès ne sont pas retrouvés. Les vitesses sismiques correspondantes n'ont pas de contrastes suffisants.

Les sismogrammes finals présentent des réflexions d'amplitude beaucoup trop faible par rapport à celles présentes dans les données. Les profondeurs des interfaces semblent cependant être des indications intéressantes.



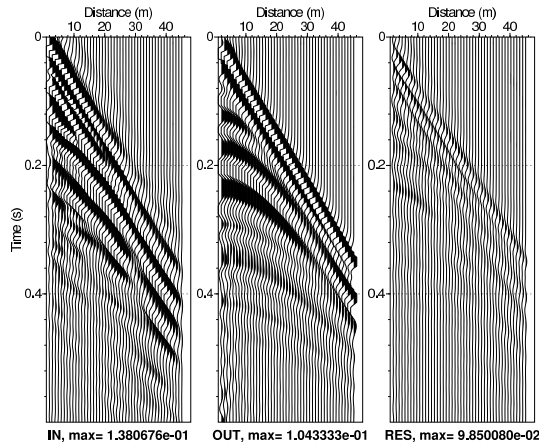
**Figure 7.9:** Résultats d'inversion couplée multiparamètre des données de la figure 7.5. Modèles initiaux et finals pour la porosité, la densité solide, le module de cisaillement solide et la consolidation.

### Inversion multiparamètre

J'ai aussi essayé d'inverser les quatre paramètres simultanément. Les variations d'un paramètre sont très fortes et compensées par des variations des autres paramètres. Ainsi, la densité et la porosité (cf. fig. 7.9) indique une diminution de vitesse entre 1 et 5 mètres tandis que la consolidation et le module de cisaillement compense cet effet. Le modèle obtenu est très oscillant et non réaliste. Les interfaces pourraient être bien localisées si le modèle lisse de départ contenait les grandes longueurs d'ondes du modèle (cf. chap. 5).

Les variations opposées des paramètres produisent des ondes réfléchies qui ne sont pas suffisamment énergétiques. Le sismogramme correspondant au modèle de la figure 7.9 est donné sur la figure 7.10. Les vitesses des ondes S et les hyperboles de réflexions sont mal, voire pas, reconstruites.

Pour compenser l'effet oscillant du modèle, j'ai essayé de retrouver un modèle lisse



**Figure 7.10:** *Données, sismogramme final et résidus pour l'inversion couplée multiparamètre des données de la figure 7.5.*

en utilisant une matrice de covariance du modèle avec une bande diagonale très large (cf. chap. 5 et 6). Le modèle obtenu ne s'éloigne que très peu du modèle de départ. Des oscillations sont présentes sur les modèles finals et sont toujours compensées par les variations des autres paramètres. J'ai utilisé ces modèles comme modèles initiaux d'inversion multiparamètre ou monoparamètre, sans résultat probant.

J'ai ensuite combiné les résultats des inversions multiparamètres et mono-paramètre. Ainsi, j'ai utilisé le modèle divergent de l'inversion multiparamètre (figure 7.9) comme départ de l'inversion mono-paramètre et inversement. Les résultats obtenus n'ont pas incité à poursuivre dans cette voie.

### Utilisation de l'information stratigraphique

Il apparaît donc très difficile de retrouver un modèle de terrain en partant d'un modèle lisse, si aucune information n'est disponible sur le milieu. Il semble possible de retrouver les profondeurs des interfaces à condition de partir d'un modèle où les vitesses sont proches des vitesses réelles.

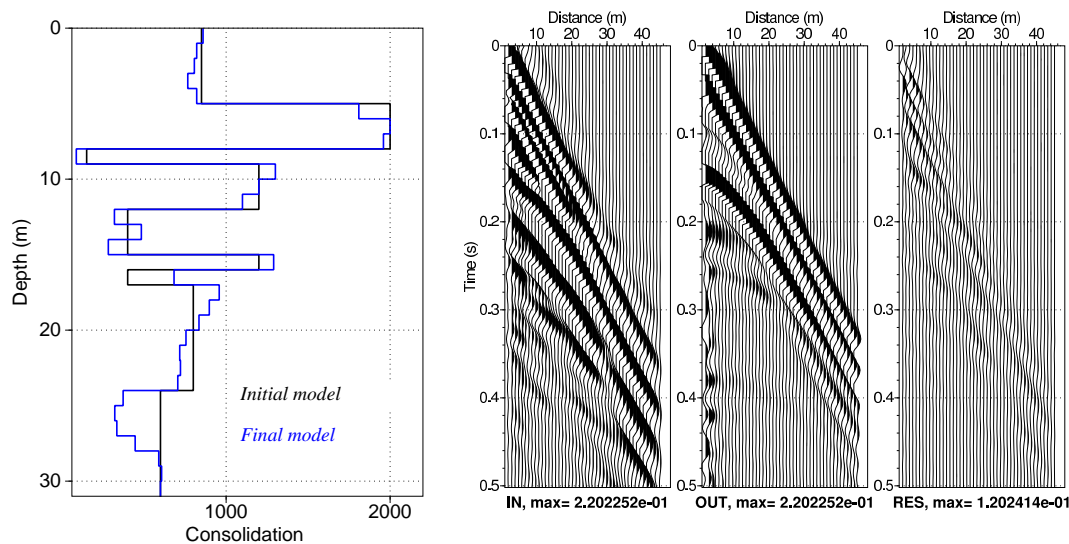
Pour résoudre les ambiguïtés existant entre les vitesses et les paramètres poro-élastiques, il est aussi souhaitable de diminuer le nombre d'inconnues. La densité des minéraux, qui varie peu, est supposée constante et égale à 2.7. L'absence d'onde P et les rôles similaires de  $c_s$  et  $G_s$  dans la caractérisation de  $G$  font que ces deux paramètres peuvent être indifféremment retrouvés. Il est donc possible de profiter du couplage entre ces deux paramètres pour ne chercher à caractériser que la consolidation. Dans ce cas,  $G_s$  est considéré constant et égal à 34 GPa. Seuls deux paramètres sont donc utiles et possibles à retrouver : la porosité et la consolidation.

J'ai utilisé les sorties d'inversion à partir du modèle lisse et le log stratigraphique pour retrouver les interfaces et les contrastes de la consolidation et de la porosité. Le modèle

initial de la consolidation de la figure 7.11 a été déterminé par essai-erreur en modélisation directe. La porosité est ici gardée constante. Il est nécessaire d'introduire des contrastes très forts pour reconstruire le sismogramme. La consolidation varie ainsi de moins de 100 à plus de 2000.

J'ai ensuite essayé d'inverser la consolidation seule (fig. 7.11), puis la consolidation et la porosité en gardant le modèle de porosité lisse, et enfin ces deux paramètres en partant d'un modèle complexe.

Les modèles trouvés s'éloignent peu du modèle complexe de départ. Le sismogramme correspondant au modèle final se rapproche des données, même si certaines réflexions sont très mal retrouvées.



**Figure 7.11:** Résultats d'inversion des données de la figure 7.5. À gauche, Modèle initial (noir) et final (bleu), à droite, données, sismogramme final et résidus.

### 7.3.4 Information stratigraphique

Cette étude ne conduit pas à un modèle stratigraphique quantifié et certain en termes de paramètres poro-élastiques. Quelques constatations se dégagent cependant. Des interfaces, associées à des réflexions d'ondes sismiques fortes, sont localisées à des profondeurs de 5m, 9m, 12m, de 15 à 17m et à 24m.

De 0 à 5 mètres se trouve une couche de sable dont la faible consolidation augmente avec la profondeur (sol normalement consolidé), avec une vitesse de l'onde S d'environ 130 m/s.

En dessous, jusqu'à 9 mètres, existe une couche d'argile très peu consolidée ou plutôt avec un module de cisaillement faible et une forte porosité pouvant dépasser 50%. Ces valeurs fortes sont cohérentes avec des mesures sur carottes effectuées en milieu marin dans le Golfe du Lion (Rabineau, 2001). La vitesse sismique de l'onde S (environ 90 m/s) est inférieure à celle de la première couche. Cette couche d'argile surmonte une couche dure (conglomérats, grès, argile?), très consolidée, avec des vitesses des ondes de cisaillement beaucoup plus fortes (environ 410 m/s). Le contraste mécanique entre les deux est très fort. L'épaisseur de cette couche, située à environ 9 mètres de profondeur, est certainement inférieure à 1 mètre. Elle est associée à la discordance entre le Pliocène et l'Holocène supérieur.

Jusqu'à 12 mètres se trouve une couche d'argile, légèrement plus consolidée, ou moins poreuse ( $V_s=120$  m/s) que l'argile localisée de 5 à 9 mètres.

L'interface située à 12 mètres de profondeur produit des réflexions très fortes, dues aux contrastes mécaniques élevés entre l'argile et le grès. Ces bancs de grès, ou de sable consolidé, ont une épaisseur d'environ 5 mètres. La porosité est sans doute toujours élevée (40%), mais les grains sont cimentés entre eux. La vitesse trouvée ( $V_s=340$  m/s) est faible par rapport aux valeurs trouvées par l'analyse des ondes réfractées ( $V_s=430$  m/s).

A environ 16 mètres de profondeur, et peut être aussi vers 14 mètres, une couche d'argile fine traverse les grès. En dessous, le log stratigraphique montre plusieurs dizaines de mètres d'argile traversées par des couches de grès. La pénétration des ondes sismiques n'est pas suffisante pour atteindre le bas de cette formation. L'inversion montre cependant la possible présence de réflecteurs, autour de 24 mètres de profondeur, correspondant certainement à des discordances géologiques entre différents niveaux argileux. La consolidation semble augmenter avec la profondeur dans cette couche. La vitesse des ondes S dans cette formation semble être comprise entre 160 et 240 m/s.

Le modèle que j'ai cherché à reconstruire avec la sismique réflexion est donc complexe, car il montre des contrastes très forts entre des matériaux différents, des variations de vitesses sismiques fortes avec notamment plusieurs couches à moindre vitesse.

## 7.4 Conclusion

### Bilan

Des traces sismiques ont été acquises avec des géométries  $SH$  et  $P - SV$  sur le site de Maguelone, dans l'Hérault. Ce site, situé entre la mer et un étang, présente une alternance de sable, argile et conglomérats.

Les signaux sont nettoyés dans la domaine fréquence-nombres d'ondes. Tous les traitements effectués génèrent des changements de formes d'ondes. Il faut donc trouver un ajustement entre l'efficacité des traitements et une perte d'information acceptable. Une autre difficulté est la source qui, non connue et différente d'un signal de Ricker, ne peut être déconvoluée facilement.

J'ai voulu débiter l'inversion comme si je n'avais pas à ma disposition de log stratigraphique. Le problème qui se pose est de trouver un modèle proche du modèle réel pour initier l'inversion, de façon à éviter de trouver des modèles excentriques. Les méthodes classiques (réfraction, ondes de surface...) donnent des informations sur les vitesses des ondes, ce qui ne résout pas l'ambiguïté sur les paramètres poro-élastiques.

L'inversion multiparamètre est très délicate, et conduit à des modèles divergents où les variations d'un paramètre sont compensées par celles d'un autre paramètre. L'inversion d'un seul paramètre donne des informations sur les positions des réflecteurs à condition que les vitesses des ondes sismiques correspondant au modèle de départ soient proches de la réalité.

J'ai ensuite utilisé les données stratigraphiques et une démarche par essai-erreur en modélisation directe pour tenter de trouver un modèle de départ se rapprochant le plus possible du modèle vrai. L'ambiguïté entre la porosité et la consolidation est toujours un problème dans l'inversion. Les résultats d'inversion fournissent un sismogramme se rapprochant des données, mais restent cependant peu satisfaisants.

Les informations trouvées sur la stratigraphie du site sont des alternances de couches très faiblement consolidées ou à très forte porosité (argile) avec des zones plus raides (sables et conglomérats). Les contrastes mécaniques sont très forts. L'incapacité à trouver un modèle poro-élastique fiable empêche l'accès à des paramètres beaucoup plus délicats à retrouver, mais plus intéressant pour cette problématique. Obtenir les différences de salinité du fluide à partir des ondes P est ici totalement irréaliste.

### **Difficultés et perspectives**

Ce chapitre a présenté certains des essais effectués pour caractériser un milieu poreux à partir de la sismique-réflexion.

J'ai cherché par tâtonnement une stratégie permettant d'extraire l'information. Une des conclusions est la nécessité d'utiliser plus d'informations ou de l'utiliser différemment pour obtenir un modèle a priori. Une possibilité est d'obtenir les vitesses élastiques par une inversion élastique de formes d'ondes complètes (Moinet, 1997). Les paramètres poro-

élastiques pourraient ensuite être retrouvés en contraignant les vitesses sismiques. Il aurait été judicieux d'utiliser une information venant d'autres méthodes géophysiques. Le géoradar fournit les contrastes de permittivité électrique, qui peuvent être reliés à la porosité. Les méthodes électriques, en particulier la tomographie 2D, auraient permis d'avoir des informations sur le contenu en argile.

Le prétraitement des données, et en particulier la déconvolution de la source, mériterait d'être affiné. Il serait plus judicieux d'utiliser une source vibratoire (Magnin, 2007). Par corrélation entre la trace enregistrée à proximité de la source et les données, la source se ramène à un signal de Klauder, qu'il est possible d'introduire dans le code d'inversion. De plus, cette source sismique permettrait d'obtenir un signal contenant beaucoup plus de hautes fréquences, ce qui améliorerait la résolution verticale.

Les relations de la poro-élasticité ne sont pas universelles. Celles utilisées ici sont adaptées aux matériaux consolidés à fortes porosités et perméabilités, constitués d'un seul type de minéraux. Les matériaux idéaux sont des grès et sables consolidés. Je cherche ici à reconstituer les propriétés d'argiles, de sables et de conglomérats, composés de plusieurs minéraux. De plus, l'atténuation est imparfaitement décrite par ces lois, et est pourtant utilisée dans le processus d'inversion. Des difficultés peuvent aussi venir d'hétérogénéités latérales, contredisant l'hypothèse d'un milieu tabulaire.

Enfin, le site de Maguelone a été choisi car il est prévu de mesurer la porosité et la densité sur les sols issus des forages. Malheureusement, au moment de l'écriture de ce manuscrit, ces données ne sont pas disponibles. L'intérêt de ces informations est multiple. Tout d'abord, en modélisation directe, il sera possible de comparer les données mesurées et calculées. En cas de bonnes concordances, la connaissance de ces paramètres permettra de facilement déterminer les autres paramètres ou de vérifier les sorties d'inversion.





## Conclusions et perspectives

# Conclusions et perspectives

L'objectif de cette thèse est d'étudier les possibilités de retrouver les paramètres poro-élastiques à partir d'une inversion des formes d'ondes sismiques complètes.

Les milieux poreux sont des milieux polyphasiques, où le vide laissé par les grains est occupé par du fluide. Pour construire les relations de la poro-élasto-dynamique (Gassmann, 1951; Biot, 1956), de nombreux paramètres sont nécessaires, tant à l'échelle du pore que macroscopique. Les propriétés des fluides et des pores sont ainsi directement reliés aux vitesses des ondes sismiques.

La résolution de ces équations conduit à trois ondes différentes : des ondes de compression et de cisaillement classiques et une onde de compression dite lente qui, à basse fréquence est une onde de diffusion de la pression interstitielle. En outre, ces équations font appel à deux déplacements : celui du milieu moyen et celui relatif du fluide. Ces équations présentent l'avantage de relier directement l'atténuation et la dispersion aux propriétés intrinsèques du milieu poreux et en particulier, aux propriétés du fluide.

Cependant, dans la théorie utilisée, l'atténuation n'est due qu'aux diffusions de fluide entre les grains et est sous-estimée par rapport à la réalité. Il est nécessaire de considérer des théories plus complexes pour prendre en compte les milieux non saturés ou les hétérogénéités mésoscopiques.

Toutes ces théories sont beaucoup plus complexes que la théorie élastique classique, notamment à cause du grand nombre de paramètres en jeu. De plus, il n'existe pas une théorie universelle pour tous les types de matériaux de la subsurface, problème complexifié par les différences de notations entre les différents auteurs et théories.

Le problème de la propagation des ondes en milieu poro-élastique peut être résolu par une méthode de réflectivité, de manière similaire au cas élastique.

Les théories poro-élastiques permettent d'étudier directement la sensibilité des ondes sismiques aux fluides. Par exemple, la modélisation des ondes P réfléchies montre que dans le cas du stockage géologique profond de gaz carbonique de Sleipner (mer du Nord), il est possible de retrouver la concentration et la répartition de CO<sub>2</sub> en connaissant la

lithologie du site. La faible consolidation des sédiments rend le site de Sleipner idéal pour la surveillance sismique.

L'approximation de Born et la linéarité des paramètres poro-élastiques permettent de conduire un calcul symbolique aboutissant sur l'expression semi-analytique des dérivées de Fréchet. Les dérivées partielles des déplacements fluides et solides par rapport aux modules d'incompressibilité des grains et du fluide, module de cisaillement des grains, densité du fluide et du solide, perméabilité hydrologique, porosité et consolidation sont ensuite obtenues par un changement de variable.

Ces opérateurs sont valides tant que l'approximation de Born est vérifiée, c'est-à-dire pour des perturbations faibles et localisées.

Ces opérateurs ont deux utilités : d'une part ils interviennent directement dans le processus d'inversion et d'autre part ils permettent d'étudier la sensibilité des ondes aux paramètres poreux. Les paramètres du solide ont une influence plus importante que ceux du fluide, et il est possible de les estimer avec quelques connaissances sur la lithologie. Les ondes sismiques sont très sensibles à la consolidation et à la porosité, qui deviennent les paramètres les plus intéressants à inverser. En fonction de la consolidation, le fluide ou les grains peuvent avoir une influence prédominante sur les ondes P. Enfin, certains paramètres sont couplés, ce qui peut poser des problèmes pour une inversion multiparamètres.

Les formes d'ondes sismiques complètes sont ensuite inversées en utilisant une méthode d'optimisation par moindres carrés généralisés. L'algorithme de Quasi-Newton donne de meilleurs résultats que celui de gradient conjugué et est plus adapté à ce problème. L'utilisation d'une matrice de covariance donnée non diagonale améliorent l'inversion : l'algorithme ajuste les données et leurs dérivées temporelles (norme  $H^1$ ). Une covariance modèle non diagonale stabilise l'inversion mais lisse le modèle final, ce qui n'est pas souhaité ici.

L'inversion de sismogrammes synthétiques donne de bons résultats lorsqu'il s'agit de retrouver un seul paramètre, les autres étant gardés fixes et connus. Seule la perméabilité ne peut être retrouvée par cette méthode. Cependant, le couplage entre paramètres empêche la reconstruction simultanée de plusieurs paramètres. Il est possible d'inverser les ondes sismiques en taux de saturation et en lithologie en introduisant des connaissances *a priori* sur les fluides et les minéraux.

Les résultats de l'inversion peuvent être améliorés en intégrant les données par des fenêtres spatio-temporelles de taille croissante, en utilisant les ondes de surface, en fixant les premières couches du modèle ou en partant de plusieurs modèles initiaux.

Enfin, il n'est pas nécessaire d'avoir un volume important de données pour l'inversion, mais une gamme d'offset la plus large possible est souhaitable. La résolution espérée est environ la moitié de la longueur d'onde minimale des ondes P dans le cas P-SV et des

ondes S pour une géométrie SH.

Cet algorithme d'inversion est ensuite appliqué sur des données réelles enregistrées en bord de mer à Maguelone (Hérault). La stratigraphie montre des alternances d'argiles, grès et conglomérats, surmontés par une couche de sable, dans un milieu approximativement tabulaire.

L'inversion multiparamètre conduit à des modèles divergents et ne peut être utilisée. La connaissance préalable d'un modèle proche de la solution (log de forage) permet d'obtenir des informations sur la stratigraphie. Cette étude amène surtout à soulever de nombreuses difficultés (source, estimation d'un modèle *a priori*,...).

L'inversion des formes d'ondes sismiques est un outil puissant pour retrouver les paramètres poro-élastiques et les caractéristiques des fluides, à condition de n'avoir que peu de paramètres inconnus et un modèle *a priori* déjà très proche de la réalité.

## Difficultés et perspectives

L'atténuation, calculée à partir des paramètres du milieu, est insuffisante dans la théorie poro-élastique classique. De plus, la théorie utilisée est adaptée au grès et sable consolidé. L'utilisation de l'information apportée par l'atténuation n'est donc pas opérationnelle. Des théories plus complexes (double porosité,...) ont l'inconvénient d'être encore moins universelles mais peuvent être plus correctes en termes d'atténuation.

Avant de chercher à inverser des données réelles associées à des milieux géologiques complexes, il aurait été judicieux de travailler sur des matériaux correctement décrits par les lois de la poro-élasticité. De plus, pour valider le code d'inversion sur des données réelles, il aurait été souhaitable de s'intéresser à des structures simples et connues. Par exemple, des données enregistrées dans une cuve contenant un sable propre ayant une stratification verticale en termes de porosité et consolidation permettraient une véritable validation de la théorie poro-élastique et de l'inversion. De plus, travailler à des fréquences supérieures à la fréquence caractéristique du milieu (de 500 Hz à plusieurs MHz selon le matériau) serait judicieux, car l'information contenue dans l'onde lente, spécifique des milieux poreux, pourrait être utilisée.

Dans cette thèse, la fracturation n'a été prise en compte que de manière équivalente à la porosité microscopique. Cependant, dans les massifs rocheux, les propriétés des fractures (perméabilité élevée et porosité faible) sont totalement différentes de celles des pores. De plus, les fractures de grande dimension ne respectent pas les hypothèses de la théorie de Biot (1956). Il peut donc être nécessaire de rajouter des hétérogénéités macroscopiques dans les modèles.

La perméabilité ne peut pas être retrouvée par cette méthode. La très faible dépendance des ondes sismiques à ce paramètre et la mauvaise caractérisation de l'atténuation rendent ce paramètre indéterminable. L'inversion du déplacement relatif fluide par rapport au solide offrirait cette information.

L'inversion des ondes converties électromagnétiques pourrait éventuellement fournir ce paramètre. Une autre solution pour accéder à la perméabilité est d'utiliser les sources fluides générées par des injections en forage. Dans ce cas, les codes de propagation et d'inversion doivent être réécrits pour un milieu à géométrie axiale. Cette géométrie permettrait aussi d'utiliser l'information présente dans les ondes de Stoneley, qui se développent le long du forage.

Par extension, le code de propagation mériterait d'être écrit pour des milieux 2D, voire 3D, en utilisant une autre technique que celle de réflectivité. Par exemple les techniques de différences finies, d'éléments finis ou spectraux permettent des modélisations en milieu plus complexes. Le code 1D utilisé ici pourrait alors servir à les valider.

Les autres paramètres peuvent être retrouvés par un processus d'inversion de formes d'ondes complètes. Cependant, dans la majorité des cas, il est d'abord nécessaire de déterminer correctement les paramètres du solide (module de compressibilité et de cisaillement, consolidation, densité) et la porosité avant de chercher à retrouver les paramètres du fluide. Une difficulté réside dans l'estimation d'un modèle lisse permettant de démarrer l'inversion. Pour cela les ondes de surface peuvent être exploitées, mais doivent être interprétées en termes de milieu poreux. Les méthodes électriques (Nicollin et al., 2006) ou électromagnétiques (Deparis, 2007) fournissent elles aussi des informations sur les paramètres du milieu poreux. Elles peuvent donc servir à estimer le modèle initial, voire être introduits dans un algorithme d'inversion couplée avec la sismique. L'inversion élastique préalable des formes d'ondes en vitesses élastiques peut aussi fournir des contraintes utiles à l'inversion. L'inversion poro-élastique pourrait alors être contrainte en fixant les vitesses élastiques. Il est envisageable de coupler l'inversion élastique et poro-élastique.

Enfin, il semble qu'un forage soit utile dans tous les cas, pour connaître les paramètres qu'on ne souhaite pas inverser et résoudre les ambiguïtés pouvant exister entre plusieurs paramètres. De plus, la connaissance de certains paramètres permettrait de s'intéresser à des paramètres plus délicats à obtenir (propriétés du fluide) et plus adaptés aux applications concrètes. La connaissance ponctuelle des propriétés du milieu peut aussi être étendue par cette méthode. Enfin, les forages peuvent servir à calibrer le processus et les stratégies d'inversion. Cette démarche reste à faire pour les données du site de Maguelone (chapitre 7).

Les applications de cette théorie sont nombreuses et diverses. Pour pouvoir y répondre,

de nombreux champs de recherche fondamentaux sont ouverts, allant de la compréhension des phénomènes microscopiques aux processus mathématiques d'inversion en passant par la caractérisation de l'atténuation des ondes sismiques et la confrontation avec des données réelles et de laboratoire.

## Table des symboles



# Table des symboles

Paramètres du milieu poreux					
$\rho$	Densité moyenne	$kg/m^3$	$\tilde{\rho}$	Densité apparente	$kg/m^3$
$\rho_s$	Densité du solide	$kg/m^3$	$\rho_f$	Densité du fluide	$kg/m^3$
$K_u$	Mod. incomp. non drainé	$Pa$	$K_D$	Mod. incomp. drainé	$Pa$
$K_s$	Mod. incomp. du solide	$Pa$	$K_f$	Mod. incomp. du fluide	$Pa$
$C$	C-modulus	$Pa$	$M$	Coeff. de rétention fluide	$Pa$
$G$	Mod. cisaillement	$Pa$	$G_s$	Mod. cisaillement du minéral	$Pa$
$\phi$	Porosité		$cs$	Consolidation	
$k_0$	Permeabilité hydrologique	$m^2$	$k(\omega)$	Permeabilité dynamique	$m^2$
$\eta$	Viscosité du fluide	$Pa.s$	$B$	Mod. de Skempton	
$\alpha$	Mod. de Biot-Willis		$H$		$Pa$
$S_i$	Saturation en fluide $i$		$T_i$	Pourcentage vol. du minéral $i$	
Déplacements et contraintes dans le domaine $(t,x)$					
$\mathbf{u}$	Déplacement solide	$m$	$\mathbf{w}$	Dép. relatif fluide/solide	$m$
$P$	Pression interstitielle	$Pa$	$P_c$	Pression de confinement	$Pa$
$\boldsymbol{\tau}$	Tenseur des contraintes	$Pa$			
Ondes sismiques en milieu poreux					
$S$	Onde S		$Pf$	Onde P rapide	
$Ps$	Onde P lente				
$V_\xi$	Vitesse de l'onde $\xi$ (= $Pf$ , $Ps$ ou $S$ )				$m/s$
$Q_\xi$	Facteur de qualité de l'onde $\xi$ (= $Pf$ , $Ps$ ou $S$ )				
$\beta_\xi$	Rapport des amplitudes du dép. solide sur relatif fluide/solide pour l'onde $\xi$				
$q_\xi$	lenteur verticale $\xi$ (= $Pf$ , $Ps$ ou $S$ )				$s/m$
$\omega$	pulsation	$1/s$	$f$	fréquence	$1/s$
$p$	paramètre de rai		$k$	nombre d'ondes vertical	

Déplacement et contraintes dans le domaine ( $\omega,k$ )					
$U$	Déplacement solide vertical		$W$	Dép. relatif fluide vertical	
$V$	Déplacement solide radial		$X$	Dép. relatif fluide radial	
$T$	Dép. solide tangentiel		$Y$	Dép. relatif fluide tangentiel	
$\hat{P}$	Pression interstitielle	$Pa$	$\hat{\tau}_i$	Contrainte radiale (i=r,z,t)	$Pa$
$\mathbf{B}$	Vecteur colonne contenant les déplacements et contraintes				
$\mathbf{V}$	Vecteur colonne contenant les potentiels des ondes Pf, Ps et S				
Propagation des ondes					
$F_{kl}$	Force s'appliquant sur la phase $k$ dans la direction $l$				
$G_{ij}^{kl}$	Fonction de Green associé au déplacement de la phase $i$ dans la direction $j$ provoqué par une force $F_{kl}$				
Paramètres du fluide - stockage du CO2					
$T$	Température	$^{\circ}C$	$P$	pression interstitielle	$Pa$
$X_w$	Caractéristiques ( $X = \rho, K$ ou $\eta$ ) de l'eau pure				
$X_b$	Caractéristiques ( $X = \rho, K$ ou $\eta$ ) de l'eau salée				
$X_g$	Caractéristiques ( $X = \rho, K$ ou $\eta$ ) du gaz $CO_2$				
$X_{bs}$	Caractéristiques ( $X = \rho, K$ ou $\eta$ ) de l'eau salée saturée en $CO_2$				
$S$	Fraction massique en sel (NaCl)				ppm/ $10^6$
$S_{gi}$	Fraction volumique en $CO_2$ (i=0 initial ; i=c critique ; i= final)				
Paramètres d'inversion					
$\mathbf{C_D}$	Covariance données		$\mathbf{C_M}$	Covariance Modèle	
$\mathbf{m_0}$	Vecteur modèle initial		$\mathbf{m_p}$	Vecteur modèle a priori	
$\mathbf{m_n}$	Vec. modèle à l'itération $n$				
$\mathbf{d_{obs}}$	Vecteur données à inverser		$\mathbf{d_n}$	Vecteur données à l'itération $n$	
$S$	Fonction coût		$\gamma_n$	Gradient de la fonction coût	
$\mathbf{H_n}$	Hessien de la fonction coût		$\mathbf{G_n}$	Matrice des dérivées de Fréchet	



## Références bibliographiques

# Bibliographie

- P.M. Adler, C.G. Jacquin, et J.-F. Thovert. The formation factor of reconstructed porous media. *Wat. Res. Res.*, 1992.
- K. Aki et P. Richards. *Quantitative seismology*. W. H. Freeman and Co., New York, 1980.
- P. Amand et J. Virieux. Nonlinear inversion of synthetic seismic reflection data by simulated annealing. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 14(1) :612–615, 1995.
- P. Ambert. Le volcanisme Pliocène inférieur de Maguelone (région de Montpellier, Hérault). *C.R. Geosciences*, 2003.
- R. Arts, O. Eiken, A. Chadwick, P. Zweigel, L. Van des Meer, et B. Zinszner. Monitoring of CO<sub>2</sub> injected at Sleipner using time-lapse seismic data. *Energy*, 29 :1323–1392, 2004.
- B. Aunay, N. Dörfliger, C. Duvail, F. Grelot, P. Le Strat, M. Montginoul, et J.-D. Rinaudo. Hydro-socio-economic implications for water management strategies : the case of Roussillon coastal aquifer. In *International symposium - Aquifers Systems Management*, Dijon, France, 2006.
- J.-L. Auriault, L. Borne, et R. Chambon. Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of Darcy. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(5) :1641–1650, 1985.
- R. Bachrach. Joint estimation of porosity and saturation using stochastic rock-physics modeling. *Geophysics*, 71(5) :53–63, 2006.
- S. Bachu et J.J. Adams. Sequestration of CO<sub>2</sub> in geological media in response to climate change : capacity of deep saline aquifers to sequester CO<sub>2</sub> in solution. *Energy Conversion and Management*, 44 :3151–3175, 2003.
- M. Bai. On equivalence of dual-porosity poroelastic parameters. *J. Geophys. Res.*, 104 :10461–10466, 1999.
- M. Batzle et Z. Wang. Seismic properties of pore fluids. *Geophysics*, 57(11) :1396–1408, 1992.
- E. Bemer, O. Vincké, et P. Longuemare. Geomechanical log deduced from porosity and mineralogical content. *Oil and Gas Science and Technology - Rev. Institut Français du Pétrole*, 59 (4) :405–426, 2004.
- P.A. Berge, H.F. Wang, et B.P. Bonner. Pore-pressure buildup coefficient in synthetic and natural sandstones. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, 30 :1135–1141, 2003.
- J.G. Berryman et H.F. Wang. Elastic wave propagation and attenuation in a double-porosity dual permeability medium. 37 :63–78, 2000.

- J.G. Berryman, P.A. Berge, et B.P. Bonner. Transformation of seismic velocity data to extract porosity and saturation values for rocks. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(6) :3018–3027, 2000.
- J.G. Berryman, P.A. Berge, et B.P. Bonner. Estimating rock porosity and fluid saturation using only seismic velocities. *Geophysics*, 67 :391–404, 2002.
- M. Bickle, A. Chadwick, H. E. Huppert, M. Hallworth, et S. Lyle. Modelling carbon dioxide accumulation at Sleipner : Implications for underground carbon storage. *Earth and Planetary Science Letters*, 255 :164–176, March 2007.
- M.A. Biot. General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.*, 12(2) :155–164, 1941.
- M.A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. i. low-frequency range, ii. higher frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.*, 28 :168–191, 1956.
- M.A. Biot. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *J. Appl. Phys.*, pages 1482–1498, 1962.
- M.A. Biot et D.G. Willis. The elastic coefficients of the theory of consolidation. *J. Appl. Phys.*, 24 :594–601, 1957.
- C. Bordes, L. Jouniaux, M. Dietrich, J.-P. Pozzi, et S. Garambois. First laboratory measurements of seismo-magnetic conversions in fluid-filled Fontainebleau sand. *Geophys. Res. Lett.*, 33, 2006.
- M. Bosch. The optimization approach to lithological tomography : Combining seismic data and petrophysics for porosity prediction. *Geophysics*, 69 :1272–1282, 2004.
- M. Bosch. Lithologic tomography : From plural geophysical data to lithology estimation. *J. Geophys. Res.*, 104(B1) :749–766, 1999.
- M. Bouchon. A simple method to calculate Green’s functions for elastic layered media. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 71(4) :959–971, 1981.
- M. Bouchon et K. Aki. Discrete wave-number representation of seismic-source wave fields. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 67(2) :259–277, 1977.
- T. Bourbié, O. Coussy, et B. Zinszner. *Acoustique des milieux poreux*. Institut Français du pétrole, 1986.
- C. Boutin. Green functions and associated sources in infinite and stratified poroelastic media. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, pages 521–550, 1987.
- A. Brie, F. Pampuri, A.F. Marsala, et O. Meazza. Shear sonic interpretation in gas-bearing sands. *SPE Annual Technical Conf. 30595*, pages 701–710, 1995.
- R.J.S. Brown. Connection between formation factor for electrical resistivity and fluid-solid coupling factor for biot’s equation in fluid filled porous media. *Geophysics*, 45 :1269–1275, 1980.
- X. Campman, K. Van Wijk, C.D. Riyanti, J. Scales, et G. Herman. Imaging scattered seismic surface waves. *Near Surface Geophysics*, 2 :223–230, 2004.
- J.M. Carcione. Wave propagation in anisotropic, saturated porous media : Plane-wave theory and numerical simulation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(5) :2655–2666, 1996.

- J.M. Carcione, F. Cavallini, J.E. Santos, C.L. Ravazzoli, et P.M. Gauzellino. Wave propagation in partially saturated porous media : simulation of a second slow wave. *Wave Motion*, 39 : 227–240, 2004.
- J.M. Carcione, S. Picotti, D. Gei, et G. Rossi. Physics and seismic modeling for monitoring CO<sub>2</sub> storage. *Pure appl. geophys.*, 163 :175–207, 2006.
- J.P. Castagna, M.L. Batzle, et R.L. Eastwood. Relationships between compressional-wave and shear-wave velocities in elastic silicate rocks. *Geophysics*, 50(4) :571–581, 1985.
- N.P. Chotiros. An inversion for Biot parameters in a water-saturated sand. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(5) :1853–1868, 2002.
- J.F. Claerbout. Toward a unified theory of reflector mapping. *Geophysics*, 36(3) :467–481, 1971.
- J.F. Claerbout. *Imaging the earth's interior*. Blackwell Scientific Publ., 1985.
- G. Clauzon, J.P. Aguilar, et J. Michaux. Le bassin pliocène du Roussillon (Pyrénées-Orientales, France) : Exemple d'évolution géodynamique d'une ría méditerranéenne consécutive à la crise de salinité messinienne. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 304 :585–590, 1987.
- F. Courboux, J. Virieux, et D. Gibert. On the use of simulated annealing method and cross-validation theory and simulated annealing for deconvolution of seismograms. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 86 :1187–1193, 1996.
- N. Dai, A. Vafidis, et E.R. Kanasewich. Wave propagation in heterogeneous porous media : A velocity-stress, finite-difference method. *Geophysics*, 60(2) :327–340, 1995.
- L. De Barros et M. Dietrich. First-order perturbations of the seismic response of fluid-filled stratified poro-elastic media. In *76th international meeting, Society of Exploration Geophysicists, Expanded Abstracts*, pages 2250–2254, New Orleans, 2006.
- L. De Barros et M. Dietrich. Full waveform inversion of shot gathers in terms of poro-elastic parameters. In *London 2007, 69th EAGE Conference & Exhibition, Expanded abstract*, pages 2250–2254, 2007.
- L. De Barros, H. A. Pedersen, J.-P. Métaxian, C. Valdès-Gonzalez, et P. Lesage. Crustal structure below Popocatepetl Volcano (Mexico) from analysis of Rayleigh waves. *J. Volc. Geoth. Res.*, 2007. In Press.
- V. de la Cruz et T.J.T. Spanos. Seismic wave propagation in a porous medium. *Geophysics*, 50 (10) :1556–1565, 1985.
- V. de la Cruz et T.J.T. Spanos. Seismic boundary conditions for porous media. *J. Geophys. Res.*, 94(B3) :3025–3029, 1989.
- V. de la Cruz, J. Hube, et T.J.T. Spanos. Reflection and transmission of seismic waves at the boundaries of porous media. *Wave Motion*, 16 :323–338, 1992.
- F. Delprat-Jannaud et P. Lailly. A fundamental limitation for the reconstruction of impedance profiles from seismic data. *Geophysics*, 70(1) :R1–R14, 2005.
- F. Delprat-Jannaud et P. Lailly. Ill-posed and well-posed formulations of the reflection travel time tomography problem. *J. Geophys. Res.*, 98 :977–980, 1993.

- A.I.M. Denneman, G.G. Drijkoningen, D.M.J. Smeulders, et K. Wapenaar. Reflection and transmission of waves at a fluid/porous-medium interface. *Geophysics*, 67(1) :282–291, 2002.
- J. Deparis. *Etude des éboulements rocheux par méthodes géophysiques*. PhD thesis, Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Université J. Fourier, Grenoble I, 2007.
- H. Deresiewicz et R. Skalak. On uniqueness in dynamic poroelasticity. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 53(4) :783–788, 1963.
- M. Dietrich. Modeling of marine seismic profiles in the t-x and tau-p domains. *Geophysics*, 53(4) :453–465, 1988.
- M. Dietrich et F. Kormendi. Perturbation of the plane-wave reflectivity of a depth-dependent elastic medium by weak inhomogeneities. *Geophy. J. Int.*, 100 :203–214, 1990.
- S.N. Domenico. Effect of brine-gas mixture on velocity a unconsolidated sand reservoir. *Geophysics*, 41 :882–894, 1976.
- S.N. Domenico. Rock lithology and porosity determination from shear and compressionnal wave velocity. *Geophysics*, 49(8) :1188–1195, 1984.
- P.M. Doyen. Porosity from seismic data : A geostatistical approach. *Geophysics*, 53(10) :1263–1275, 1988.
- N.C. Dutta et H. Odé. Attenuation and dispersion of compressionnal waves in fluid-filled porous rocks with partial gas saturation (White model) - Part I : Biot theory. *Geophysics*, 44(11) :1777–1788, 1979.
- N.C. Dutta et A.J. Sheriff. On white’s model of attenuation in rocks with partial gas saturation. *Geophysics*, 44(11) :1806–1812, 1979.
- C. Duvail, C. Gorini, J. Lofi, P. Le Strat, G. Clauzon, et A.T. dos Reis. Correlation between onshore and offshore pliocene-quaternary systems tracts below the roussillon basin (eastern pyrenees, france). *Marine and Petroleum Geology*, 22(6-7) :747–756, 2005.
- J. Dvorkin, G. Mavko, et A. Nur. Squirt flow in fully saturated rocks. *Geophysics*, 60 :97–107, 1995.
- M. Trifunac (editor). Biot centennial - earthquake engineering. *Special issue of the International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 26(6-7) :483–724, 2006.
- J. Frenkel. On the theory of seismic and seismoelectric phenomena in moist soils. *Journal of Physics*, 8(4) :230–241, 1944.
- S. Garambois. *Etudes expérimentales et théoriques des conversions d’ondes sismo-électriques dans les milieux poreux superficiels*. PhD thesis, Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Université J. Fourier, Grenoble I, 1999.
- S. Garambois et M. Dietrich. Full waveform numerical simulations of seismoelectromagnetic wave conversions in fluid-saturated stratified porous media. *J. Geophys. Res.*, 107(B7) :2148–2165, 2002.
- J. Garmany. Some properties of elastodynamic eigensolutions in stratified media. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 75 :565–569, 1983.



- F. Gassmann. Über die elastizität poröser medien. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 96 :1–23, 1951.
- O. Gauthier, J. Virieux, et A. Tarantola. Two dimensionnal nonlinear inversion of seismic waveforms : numerical results. *Geophysics*, 51 :1387–1403, 1986.
- J. Geertsma et D.C. Smith. Some aspects of elastic wave propagation in fluid-saturated porous solid. *Soc. Pet. Eng. J.*, 26 :235–248, 1961.
- S. Gelinsky, S.A. Shapiro, T. Muller, et B. Gurevich. Dynamic poroelasticity of thinly layered structures. *Int. J. Solids Structures*, 35(34-35) :4739–4751, 1998.
- C. Gélis. *Inversion des formes d'onde élastique dans le domaine espace-fréquence en deux dimensions. Applications à la caractérisation de la subsurface dans le cadre de la détection de cavités souterraines*. PhD thesis, Laboratoire Géosciences Azur, Sophia Antipolis, 2005.
- W.P. Gouveia et J.A. Scales. Resolution of seismic waveform inversion : Bayes versus occam. *Inverse Problems*, 13 :323–349, 1997.
- W.P. Gouveia et J.A. Scales. Bayesian seismic waveform inversion- parameter estimation and uncertainty analysis. *J. Geophys. Res.*, 1998.
- Y. Guéguen et V. Palciauskas. *Introduction à la physique des roches*. Hermann, Paris, 1992.
- J. Gunning et M.E. Glinisky. Detection of reservoir quality using bayesian seismic inversion. *Geophysics*, 72(3) :R37–R49, 2007.
- B. Gurevich et M. Shoenberg. Interface conditions for Biot's equations of poroelasticity. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(5) :2585–2589, 1999.
- B. Gurevich, V.B. Zyrianov, et S.L. Lopatnikov. Seismic attenuation in finely layered porous rocks : Effects of fluid flow and scattering. *Geophysics*, 62(1) :319–324, 1997.
- M.W. Haartsen et S.R. Pride. Electro seismic waves from point sources in layered media. *J. Geophys. Res.*, 102(B11) :745–769, 1997.
- N.A. Haskell. The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 43 :17–34, 1953.
- B. Hernandez, F. Cotton, et M. Campillo. Contribution of radar interferometry to a two-step inversion of the kinematic process of the 1992 landers earthquake. *J. Geophys. Res.*, 104(B6) :13083–13100, 1999.
- J.A. Hudson. A quantitative evaluation of seismic signals at teleseismic distances- i, radiation from point sources. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 18 :233–249, 1969.
- J.A. Hudson et J.R. Heritage. The use of the Born approximation in seismic scattering problems. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 66 :221–240, 1981.
- M. Jannane, W. Beydoun, E. Crase, D. Cao, Z. Koren, E. Landa, M. Mendes, A. Pica, M. Noble, G. Roeth, S. Singh, R. Snieder, A. Tarantola, D. Trezeguet, et M. Xie. Wavelengths of earth structures that can be resolved from seismic reflection data. *Geophysics*, 54(7) :906–910, 1989.
- D.L. Johnson. Theory of frequency dependent acoustics in patchy-saturated porous media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(2) :682–694, 2001.

- D.L. Johnson, M.N. Toksöv, et A. Timur. Attenuation of seismic waves in dry and saturated rocks : II. mechanisms. *Geophysics*, 44 :691–711, 1979.
- D.L. Johnson, J. Koplik, et R. Dashen. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 176 :379–402, 1987.
- D.L. Johnson, T.J. Plona, et H. Kojima. Probing porous media with first and second sound. I. dynamic permeability. II. acoustic properties of water-saturated porous media. *Journal of Applied Physics*, 76(1) :104–125, 1994.
- B.L.N. Kennett. *Seismic Wave Propagation in Stratified Media*. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- B.L.N. Kennett et N.J. Kerry. Seismic waves in a stratified half space. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 57 :557–583, 1979.
- M.A. Knackstedt, C.H. Arns, et W.V. Pinczewski. Velocity-porosity relationships : Predictive velocity model for cemented sands composed of multiple mineral phases. *Geophysical Prospecting*, 53(3) :200–223, 2005.
- F. Kormendi et M. Dietrich. Nonlinear waveform inversion of plane-wave seismograms in stratified elastic media. *Geophysics*, 56(5) :664–674, 1991.
- G. Lambaré, J. Virieux, R. Madariaga, et S. Jin. Iterative asymptotic inversion in the acoustic approximation. *Geophysics*, 57 :1138–1154, 1992.
- G. Lambaré, S. Operto, P. Podvin, et P. Thierry. 3-D ray +Born migration/inversion : theory. *Geophysics*, 68 :1348–1356, 2003.
- Y. Le Guen, F. Renard, R. Hellmann, E. Brosse, M. Collombet, D. Tisserand, et J.-P. Gratier. Enhanced deformation of limestone and sandstone in the presence of high pco<sub>2</sub> fluids. *J. Geophys. Res.*, 112(B5), 2007.
- A. Legchenko, J.-M. Baltassat, A. Beauce, et J. Bernard. Nuclear magnetic resonance as a geophysical tool for hydrogeologists. *J. Appl. Phys.*, 50(2) :21–46, 2002.
- J. Lofi, C. Gorini, S. Berné, G. Clauzon, A.T. Dos Reis, W.B.F. Ryan, et M.S. Steckler. Erosional processes and paleo-environmental changes in the western gulf of lions (sw france) during the messinian salinity crisis. *Marine Geology*, 217(1-2) :1–30, 2005.
- J.-F. Lu et A. Hanyga. Fundamental solution for a layered porous half space subject to a vertical point force or a point fluid source. *Comput. Mech.*, 2004.
- O. Magnin. *Utilisation des ondes sismiques pour la caractérisation des objets enfouis : Contribution à la mise au point d'une méthode d'imagerie sismique de très haute résolution*. PhD thesis, Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Université J. Fourier, Grenoble I, 2007.
- Y.J. Masson et S.R. Pride. Poroelastic finite difference modeling of seismic attenuation and dispersion due to mesoscopic-scale heterogeneity. *J. Geophys. Res.*, 112(B03204), 2007.
- G. Mavko. Frictional attenuation : an inheritance amplitude dependance. *J. Geophys. Res.*, 84 : 4769–4776, 1979.

- G. Mavko et D. Jizba. Estimating grain-scale fluid effects on velocity dispersion in rocks. *Geophysics*, 56 :1940–1949, 1991.
- G. Mavko, T. Mukerji, et J. Dvorkin. *The Rocks Physics Handbooks, Tools for Seismic Analysis in Porous Media*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998.
- F. Moinet. *Inversion linéarisée de profils de sismique marine en milieu stratifié élastique*. PhD thesis, Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Université J. Fourier, Grenoble I, 1997.
- V. Monteiller, J.-L. Got, J. Virieux, et P. Okubo. An efficient algorithm for double-difference tomography and location in heterogeneous media, with an application to the kilauea volcano. *J. Geophys. Res.*, 110(B12306) :1–22, 2005.
- M.M. Mora, P. Lesage, B. Valette, G.E. Alvarado, C. Leandro, J.-P. Máxian, et J. Dorel. Shallow velocity structure and seismic site effects at arenal volcano, costa rica. *J. Volc. Geoth. Res.*, 152(1-2) :121–139, 2006.
- P. Mora. Elastic wavefield inversion of reflection and transmission data. *Geophysics*, 53 :750–759, 1988.
- P. Mora. Inversion = migration + tomography. *Geophysics*, 54(12) :1575–1586, 1989.
- K. Mosegaard et A. Tarantola. Probabilistic approach to inverse problems. *International handbook of earthquake and engineering seismology*, pages 237–265, 2002. Academic Press Inc.
- T. Mukerji, P. Avseth, G. Mavko, I. Takahashi, et E.F. Gonzalez. Statistical rock physics : Combining rock physics, information theory, and geostatistics to reduce uncertainty in seismic reservoir characterization. *The Leading Edge*, 20(3) :313–319, 2001.
- F. Nicollin, D. Gibert, F. Beauducel, G. Boudonc, et J.-C. Komorowskic. Electrical tomography of La Soufrière of Guadeloupe volcano : Fields experiments, 1D inversion and qualitative interpretation. *Earth and Planetary Science Letters*, 244(3-4) :709–724, 2006.
- A.N. Norris. Radiation from a point source and scattering theory in a fluid-saturated porous solid. *J. Acoust. Soc. Am.*, pages 2012–2023, 1985.
- R.F. O’Doherty et N.A. Anstey. Reflections on amplitude. *Geophysical Prospecting*, 19 :430–438, 1971.
- S. Operto, C. Ravaut, L. Improta, J. Virieux, A. Herrero, et P. Dell’Aversana. Quantitative imaging of complex structures from multi-fold wide aperture seismic data. *Geophysical Prospecting*, 52 :625–651, 2004.
- G.S. Pan, R.A. Phinney, et R.I. Odom. Full-waveform inversion of plane-wave seismograms in stratified acoustic media : Theory and feasibility. *Geophysics*, 53 :21–31, 1988.
- A. Pica, J. P. Diet, et A. Tarantola. Nonlinear inversion of seismic reflection data in a laterally invariant medium. *Geophysics*, 55 :284–292, 1990.
- T.J. Plona. Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies. *Appl. Phys. Lett.*, 36(4) :259–261, 1980.
- R. Polak et G. Ribière. Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées. *Revue Fr. Inf. Rech. Op.*, 16(R1) :35–43, 1969.

- R.G. Pratt, Z. Song, P. Williamson, et M. Warner. Two-dimensionnal velocity model from wide-angle seismic data by wavefield inversion. *Geophy. J. Int.*, 133 :341–362, 1996.
- S. R. Pride. Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media. *Physical Review B*, 50(21) :15678–15696, 1994.
- S. R. Pride et S. Garambois. The role of Biot slow wave in electroseismic wave phenomena. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111(2) :697–706, 2002.
- S.R. Pride. *Hydrogeophysics*, chapter 8 : Relationships between seismic and hydrological properties. Water Science and Technology Library, Springer, Berlin, 2005.
- S.R. Pride et J.G. Berryman. Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials, i. governing equations and acoustic attenuation. *Physical Review E*, 68, 2003a.
- S.R. Pride et J.G. Berryman. Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials, ii. fluid transport equations. *Physical Review E*, 68, 2003b.
- S.R. Pride, A.F. Gangi, et F.D. Morgan. Deriving the equations of motion for porous isotropic media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(6) :3278–3290, 1992.
- S.R. Pride, E. Tromeur, et J.G. Berryman. Biot slow-wave effects in stratified rock. *Geophysics*, 67 :1–211, 2002.
- S.R. Pride, J.G. Berryman, et J.M. Harris. Seismic attenuation due to wave-induced flow. *J. Geophys. Res.*, 2004.
- M. Rabineau. *Un modèle géométrique et stratigraphique des séquences de dépôts quaternaires sur la marge du Golfe du Lion : Enregistrement des cycles climatiques de 100 000 ans*. PhD thesis, Géosciences Rennes, Université de Rennes 1, 2001.
- P.N.J. Rasolofosaon. Importance of interface hydraulic condition on the generation of second bulk compressional wave in porous media. *Appl. Phys. Lett.*, 52(10) :780–782, 1988.
- P.N.J. Rasolofosaon et B.E. Zinszner. The unreasonable success of Gassmann’s theory. In *EAGE/SEG Research Workshop on reservoirs rock*, Pau, France, 2001.
- P.N.J. Rasolofosaon et B.E. Zinszner. Vérification expérimentale de la formule de Gassmann dans les calcaires poreux. *Oil and Gas Science and Technology - Rev. Institut Français du Pétrole*, 52(2) :129–138, 2002.
- J. Reynolds. *An introduction to applied and environmental geophysics*. Wiley, 1997.
- A. Ribodetti et J. Virieux. Asymptotic theory for imaging the attenuation factor  $Q$ . *Geophysics*, 63(5) :1767–1778, 1998.
- J.H. Rosenbaum. Synthetic microseismograms : logging in porous formations. *Geophysics*, 39 : 14–32, 1974.
- M. Sambridge. Geophysical inversion with a neighborhood algorithm i-searching for a parameter space. *Geophy. J. Int.*, 1999.
- J.E. Santos, J.M. Corbero, C.L. Ravazzoli, et J.L. Hensley. Reflection and transmission coefficients in fluid-saturated porous media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91(4) :1911–1923, 1992.

- J. Savage. Thermoelastic attenuation of seismic waves by cracks. *J. Geophys. Res.*, 71 :3929–3938, 1966.
- S.A. Shapiro. An inversion for fluid transport properties of three-dimensionally heterogeneous rocks using induced microseismicity. *Geophys. J. Int.*, 143(3) :931–936, 2000.
- S.A. Shapiro, H. Zien, et P. Hubral. A generalized O’Doherty-Anstey formula for waves in finely layered media. *Geophysics*, 59(11) :1750–1762, 1994.
- R. Shipp et S. Singh. Two-dimensionnal full wavefield inversion of wide-aperture marine streamer data. *Geophys. J. Int.*, 151 :325–344, 2002.
- L. Sirgue. *Inversion de la forme d’ondes dans le domaine fréquentiel des données sismiques grands déports*. PhD thesis, Laboratoire de géologie de l’Ecole Normale Supérieure, Université Paris XI, 2003.
- A. W. Skempton. The pore pressure coefficients A and B. *Geophysics*, pages 143–147, 1954.
- R. Snieder, M. Xie, A. Pica, et A. Tarantola. Retrieving both the impedance contrast and background velocity : a global strategy for the seismic reflection problem. *Geophysics*, 54(8) : 991–1000, 1989.
- K. Spikes, J. Dvorkin, et G. Mavko. Rock physics model-based inversion. In *76th meeting, Society of Exploration Geophysicists, Expanded abstracts*, pages 1645–1649, New Orleans, 2006.
- S. Tamura, K. Tokimatsu, A. Abe, et M. Sato. Effects of air bubble on b-value and p-wave velocity of a partly saturated sand. *Soils and Foundations*, 42(1) :121–129, 2002.
- X. Tang et C.H. Cheng. Fast inversion of formation permeability from Stoneley wave logs using a simplified Biot-Rosenbaum model. *Geophysics*, 61(3) :639–645, 1996.
- A. Tarantola. The seismic reflection inverse problem, in *Inverse Problems of Acoustic and Elastic Waves*, pages 104–181. SIAM, Philadelphia, 1984a.
- A. Tarantola. Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, 49 (8) :1259–1266, 1984b.
- A. Tarantola. A strategy for nonlinear elastic inversion of seismic reflection data. *Geophysics*, 51(10) :1893–1903, 1986.
- A. Tarantola. *Inverse Problem Theory : Methods for data fitting and model parameter estimation*. Elsevier, Amsterdam, 1987.
- A. Tarantola et B. Valette. Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 20(2) :219–232, 1982a.
- A. Tarantola et B. Valette. Inverse problems = quest for information. *Journal of Geophysics*, 50 :159–170, 1982b.
- W.T. Thomson. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *J. Appl. Phys.*, 21 :89–93, 1950.
- R. Tondi et R. de Franco. Seismic travel time inversion for 3d structures regularized with sobolev norms. *Inverse Problems*, 21 :525–546, 2005.

- B. Valette et P. Lesage. Inferring mean earth mechanical model from normal modes, mass and inertia : I- theoretical developments. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 2007. submitted.
- J.B. Walsh. Seismic wave attenuation in rock due to friction. *J. Geophys. Res.*, 71 :2591–2599, 1966.
- K. Walton. The effective elastic moduli of a random packing of spheres. *J. Mech. Phys. solids*, 35 :213–226, 1987.
- Z. Wang, W.K. Hirsche, et G. Sedgwick. Seismic monitoring of water floods ?-a petrophysical study. *Geophysics*, 56 :1614–1623, 1991.
- J.E. White. Computed seismic speeds and attenuation in rocks with partial gas saturation. *Geophysics*, 40 :224–232, 1975.
- Z. X. Yao et D.G. Harkrider. A generalized reflection-transmission coefficient matrix and discrete wavenumber method for synthetic seismograms. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 73(6A) :1685–1699, 1983.
- P. Zweigel, R. Arts, A.E. Lothe, et E.B.G. Lindeberg. Reservoir geology of the Utsira Formation at the first industrial-scale underground CO<sub>2</sub> storage site (Sleipner area, North Sea). *Geological Society, London, Special Publications*, 233(1) :165–180, 2004.



# Annexes





# Annexe A :

## Changement de variables :

### Disribution équirépartie en distribu- tion gaussienne

$x$  est une variable équirépartie entre  $x_{min}$  et  $x_{max}$ .  $y$  est la variable gaussienne associée. On passe d'une variable à l'autre par :

$$\begin{aligned}x &= \frac{x_{min} + x_{max}}{2} + \frac{x_{max} - x_{min}}{2} Erf(y) \\y &= Erf^{-1} \left( \frac{2x - x_{max} - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} \right)\end{aligned}$$

La fonction  $Erf$  est la fonction erreur définie par :

$$Erf(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^y e^{-t^2} dt$$

Pour calculer les dérivées de Fréchet par rapport à  $y$  à partir de celle relative à  $x$ , il est nécessaire de connaître la dérivée de  $x$  par rapport à  $y$  :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x_{max} - x_{min}}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}$$

Enfin, la densité de probabilité de  $y$  est :

$$dens(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}$$

Il s'agit bien d'une Gaussienne centrée sur 0 de variance 1/2.



**Annexe B :**  
**Full waveform inversion of shot gathers  
in terms of poro-elastic parameters**

**Expanded Abstract,  
London 2007,  
69th Conference & Exhibition  
European Association of Geoscientists & Engineers  
(EAGE)**

Louis de Barros<sup>1</sup> and Michel Dietrich<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique (LGIT), CNRS, Université  
Joseph Fourier, BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France.*

<sup>2</sup>*Now at Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison, France*

## Summary

We have developed a full waveform iterative inversion procedure for determining the porosity, permeability, interstitial fluid properties and mechanical parameters of stratified porous media. The inverse problem is solved by using a generalized least-squares formalism. The proposed method achieves computational efficiency through semi-analytical, semi-numerical solutions for calculating the reference and perturbation wave fields from Biot's theory.

When this algorithm is applied to noise-free synthetic data, it is found that the inversion of a single parameter as a function of depth generally yields satisfactory results. However, simultaneous or sequential multi-parameter inversions underline, as expected, the interdependence between parameters having different physical dimensionality. The strong correlations that may exist between parameters of different types remain a major issue in multiparameter estimation, but viable solutions may be found when some a priori knowledge of the porous medium is available. For instance, the seismic data can be inverted for the saturation rate by knowing the properties of the interstitial fluid. Nevertheless, the approach proposed here militates in favor of a combination of different methods to solve the challenging task of estimating poro-elastic parameters from seismic data.

## Introduction

The aim of seismic data inversion is to obtain an earth model whose response best fits the observed seismograms. Because full waveform inversion techniques are sensitive to the amplitudes and phases of the seismic disturbances, the question raises whether poro-elastic parameters can be determined from seismic signals. This question has been debated since the pioneering work of Biot (1956a, 1956b) and is of paramount importance for reservoir studies. The attempts to derive poro-elastic parameters from wave velocities and attenuation, and vice-versa (Berryman *et al.*, 2002; Pride, 2003, Pride *et al.*, 2003) obviously point to the difficulty of the task. Recently, Spikes *et al.* (2006) devised a method to interpret seismic amplitudes for lithology, porosity and pore fluid by using exhaustive Monte Carlo simulation of reservoir properties as inputs into a rock physics model.

As a contribution to this problem, we investigate here the “direct” inversion of seismic data corresponding to fluid-filled stratified porous models in terms of 8 parameters characterizing each layer. These parameters include porosity  $\Phi$  and permeability  $k_o$ , solid and fluid densities  $\rho_s$  and  $\rho_f$ , mineral modulus of the grains  $K_s$ , fluid modulus  $K_f$ , shear modulus of the grains  $G_s$  and consolidation parameter  $c_s$  (see Pride, 2003, for the definition of these parameters). Our method is based on a full waveform iterative inversion procedure carried out with a gradient technique to infer an optimum model which minimizes a misfit function. The latter is defined by a sample-to-sample comparison of the observed data  $\mathbf{d}_{\text{obs}}$  with a synthetic wavefield  $\mathbf{d} = \mathbf{f}(\mathbf{m})$  in the time-space domain, and by an equivalent term describing the deviations of the current model  $\mathbf{m}$  with respect to an a priori model  $\mathbf{m}_0$ , i.e.,

$$S(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \{ \|\mathbf{d} - \mathbf{d}_{\text{obs}}\|_D^2 + \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_0\|_M^2 \},$$

where the norms  $\|\cdot\|_D$  and  $\|\cdot\|_M$  involve a data covariance matrix  $\mathbf{C}_D$  and an a priori model covariance matrix  $\mathbf{C}_M$  (Tarantola and Valette, 1982).

Our work is an extension to poro-elastic media of an algorithm previously developed for the inversion of plane-wave seismograms in elastic media (Kormendi and Dietrich, 1991). It is also a continuation of a recent contribution dealing with the derivation of the sensitivity operators for poro-elastic media (De Barros and Dietrich, 2006). For these reasons, we will only outline the inversion procedure and refer the reader to the publications mentioned above. We will then present inversion results obtained with noise-free synthetic seismograms for estimating the medium parameters, separately or simultaneously.

## Method

The implementation of a full waveform inversion method requires several ingredients which all constitute problems to solve. Firstly, we need a forward modeling code for the geometry under consideration, i.e., a computer program capable of simulating the point source response of a layered poro-elastic medium. Secondly, when choosing a gradient technique to minimize the cost function, we need an efficient method to compute the differential or perturbation seismograms representing the sensitivity of the wave fields relative to the different model parameters. Thirdly, an inversion strategy is required for the optimization problem.

The forward modeling code has been adapted from a more complex program taking into account the coupled seismic and electromagnetic wave propagation (Garambois and Dietrich, 2002). The computation of the differential seismograms required lengthy analytical developments to establish, within the Born approximation, formulas giving the Fréchet derivatives of the solid and fluid displacements in the  $P$ - $SV$  and  $SH$  wave cases by applying a perturbation analysis to the governing wave equations in the plane-wave domain. A total of 76 expressions involving the Green's functions between source and perturbation and between perturbation and receiver were thus obtained for the medium parameterization used (De Barros and Dietrich, 2006). Finally, we implemented the whole inversion procedure in the time-space domain by using either a conjugate gradient algorithm or a quasi-Newton method. We used in all cases diagonal covariance matrices in the model space and data space. We also imposed constraints on the model parameter values to keep them within physical boundaries. The inversion algorithm starts with an a priori model and is stopped when the cost function becomes less than a predefined minimum value or when a maximum number of iterations is reached.

## Inversion results

In the following examples, we consider a vertical point force and shot gathers corresponding to vertical displacements without any noise contamination, the source-time function being perfectly known. Source and receivers are located at the free surface. We do not consider direct waves and surface waves in our computations. It should be noted, however, that our algorithm is able to handle more complex source-receiver configurations, as well as multi-component datasets.

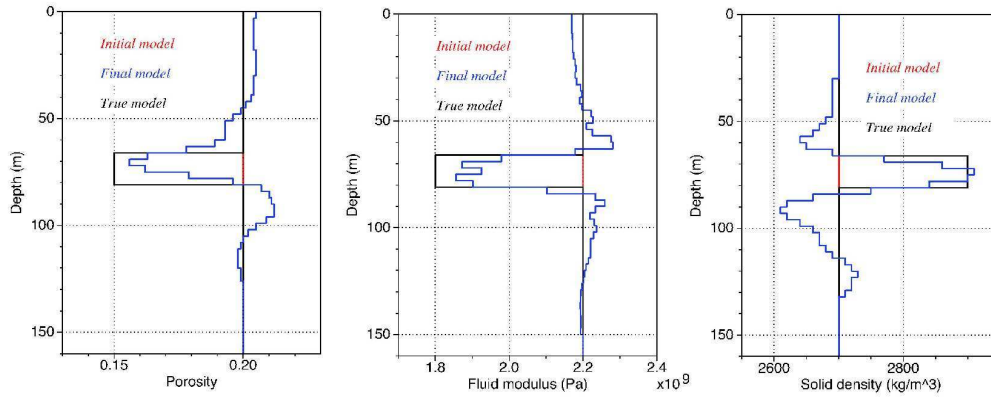


Figure 1 – Inversion results for theoretical distributions of the solid density (left), porosity (middle) and fluid modulus (right) described by “boxcar” functions. In each panel, the true model, initial model and final reconstructed model are shown in black, red and blue, respectively.

### One-parameter inversion

We first assume that only one model parameter distribution is unknown, the other parameters being perfectly known and fixed. To check the performance of the inversion algorithm, we first consider a very simple variation of the model parameters in the form of a “boxcar” function. The medium is discretized with thin layers whose thickness usually represents  $\frac{1}{2}$  or  $\frac{1}{4}$  of the shortest wavelength. The structure is reconstructed via the inversion method described above (Figure 1). In spite of some inaccuracies, the results displayed in Figure 1 show that the inversion algorithm does a reasonable job to estimate the true models when only one parameter distribution is considered at a time. We also considered a more complex model depicted in Figure 2. Here too, we observe that the inversion procedure yields satisfactory results, although we may notice a deterioration of the results as a function of depth.

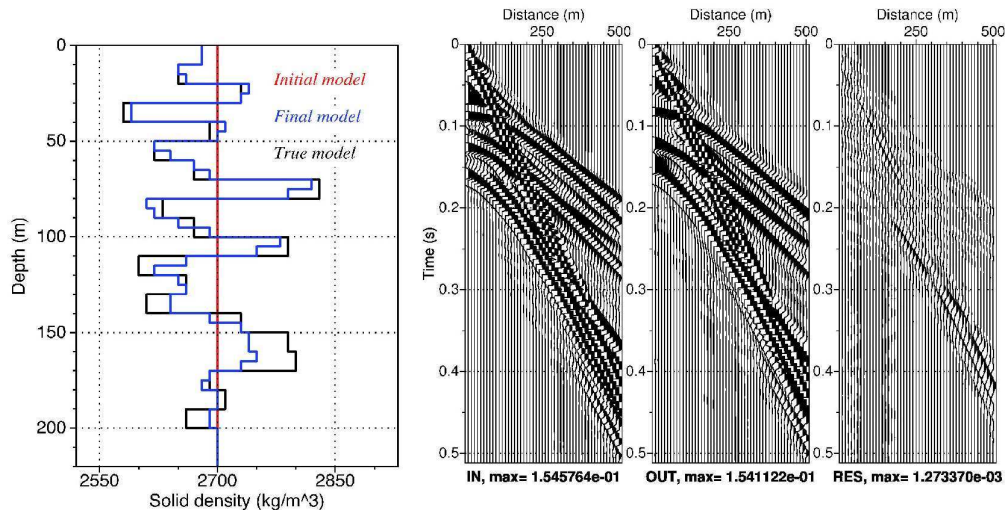


Figure 2 – Inversion of a synthetic shot gather for solid density. From left to right: panel with the true, initial and final models; seismic sections displaying the input data corresponding to the true model, the synthetic seismograms obtained at the last iteration, and the residual wave field.

### Multi-parameter inversion

Next, we test our algorithm by trying to invert for several model parameters at the same time (Figure 3 below).

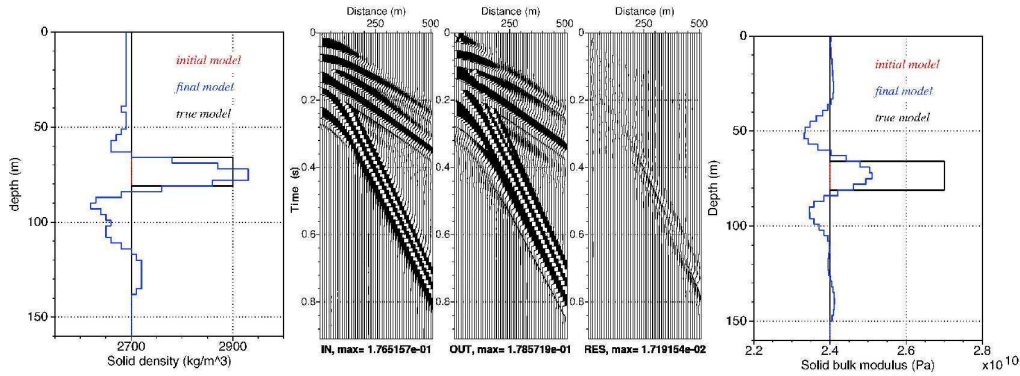


Figure 3 – Simultaneous inversion for the solid density (models on the left), and solid bulk modulus (models on the right). The seismic sections have the same meaning as in Figure 2.

This time, we notice that one of the two parameters (the solid bulk modulus) is poorly reconstructed due to parameter coupling.

Another way to proceed is to combine several parameters together and use a priori lithological information to reduce the inversion to only one parameter. An example is given below with the saturation rate chosen instead of the fluid modulus and fluid density.

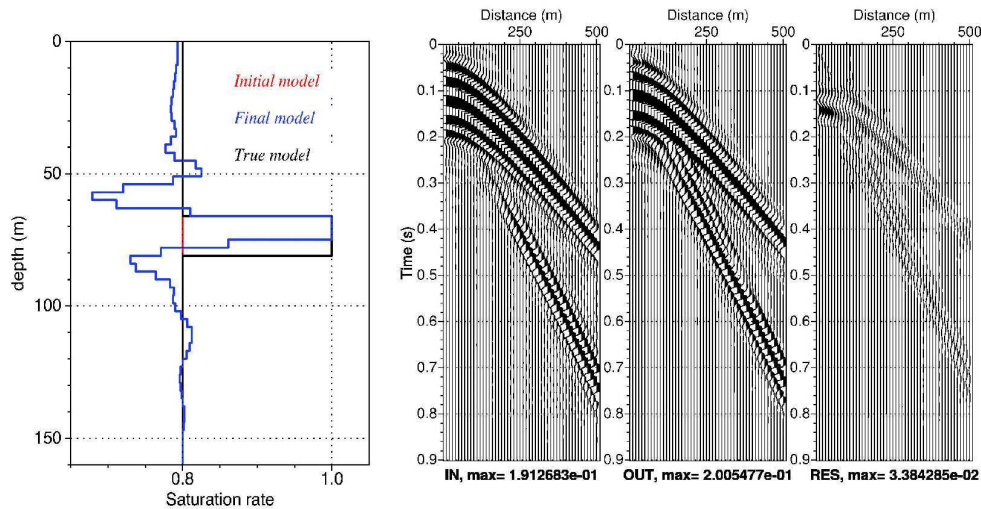


Figure 4 – Inversion for the saturation rate. Caption as in Figure 2.

### Conclusions

This work represents a first attempt to directly invert seismic shot gathers in terms of the intrinsic properties of a fluid-filled porous medium. The examples considered stress the complexity of this exercise when it comes to simultaneously invert for several parameters whose perturbations have similar radiation patterns (or AVA responses). A possible way to circumvent this problem is to consider composite parameters and reliable a priori information.



## Acknowledgements

We thank Bernard Valette, Stéphane Operto and Jean Virieux for many helpful discussions in the course of this work.

## References

- Berryman, J. G., Berge, P. A. and Bonner, B. P. [2002] Estimating rock porosity and fluid saturation using only seismic velocities. *Geophysics*, 67, 391-404.
- Biot, M.A. [1956a] Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.* 28, 168-178.
- Biot, M.A. [1956b] Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.* 28, 179-191.
- De Barros, L. and Dietrich, M. [2006] First-order perturbations of the seismic response of fluid-filled stratified poro-elastic media. 76<sup>th</sup> Meeting, Society of Exploration Geophysicists, Expanded Abstracts, 2250-2253.
- Garambois, S. and Dietrich, M. [2002] Full waveform numerical simulations of seismoelectromagnetic wave conversions in fluid-saturated stratified porous media. *J. Geophys. Res.* 107, 2148-2165.
- Kormendi, F. and Dietrich, M. [1991] Nonlinear waveform inversion of plane-wave seismograms in stratified elastic media. *Geophysics* 56, 664-674.
- Pride, S. [2003] Relationships between seismic and hydrological properties. *Hydrogeophysics*. Kluwer.
- Pride, S. R., Harris, J. M., Johnson, D. L., Mateeva, A., Nihei, K., Nowack, R. L., Rector, J. W., Spetzler, H., Wu, R., Yamamoto, T., Berryman, J. G. and Fehler, M. [2003] Permeability dependence of seismic amplitudes. *The Leading Edge*, 22, 518-525.
- Spikes, K., Dvorkin, J. and Mavko, G. [2006] Rock physics model-based seismic inversion. 76<sup>th</sup> Meeting, Society of Exploration Geophysicists, Expanded Abstracts, 1645-1649.
- Tarantola, A. and Valette, B. [1982] Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 20, 219-232.

# Annexes C :

## Crustal structure below Popocatépetl Volcano (Mexico) from analysis of Rayleigh waves.

Journal of Volcanology and Geothermal Research  
(*In Press*)

Louis De Barros<sup>1</sup>, Helle A. Pedersen<sup>1</sup>, Jean-Philippe  
Métaxian<sup>2,3</sup>, Carlos Valdés-Gonzalez<sup>4</sup> and Philippe Lesage<sup>2,3</sup>.

<sup>1</sup>*Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique (LGIT), CNRS, Université Joseph  
Fourier, BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France.*

<sup>2</sup>*Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique (LGIT), Université de Savoie, 73376  
Le Bourget-du-Lac Cedex, France.*

<sup>3</sup>*Institut de Recherche pour le Développement, France.*

<sup>4</sup>*Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Del.  
Coyoacan, México D.F., CP 04510 México.*

## Abstract

An array of ten broadband stations was installed on the Popocatépetl volcano (Mexico) for five months between October 2002 and February 2003. 26 regional and teleseismic earthquakes were selected and filtered in the frequency time domain to extract the fundamental mode of the Rayleigh wave. The average dispersion curve was obtained in two steps. Firstly, phase velocities were measured in the period range [2 - 50] s from the phase difference between pairs of stations, using Wiener filtering. Secondly, the average dispersion curve was calculated by combining observations from all events in order to reduce diffraction effects. The inversion of the mean phase velocity yielded a crustal model for the volcano which is consistent with previous models of the Mexican Volcanic Belt. The overall crustal structure beneath Popocatépetl is therefore not different from the surrounding area and the velocities in the lower crust are confirmed to be relatively low. Lateral variations of the structure were also investigated by dividing the network into four parts and by applying the same procedure to each sub-array. No well defined anomalies appeared for the two sub-arrays for which it was possible to measure a dispersion curve. However, dispersion curves associated with individual events reveal important diffraction for 6 s to 12 s periods which could correspond to strong lateral variations at 5 to 10 km depth.

## Introduction

Popocatépetl is a large andesitic strato-volcano, located 60 km south-east of Mexico City and 40 km West of Puebla (fig. 12.a). It belongs to the Trans-Mexican Volcanic Belt (MVB). Its large cone is the second highest summit of Mexico (5452 m above sea level) with an elipsoidal 600-800 m wide crater.

The present active period began on December 21st 1994. Since 1996, an andesitic to dacitic dome cyclicly grows into the crater and bursts producing high plumes of gas and ash (Arcieniega-Ceballos et al., 2000; Wright et al., 2002). More than 100 000 persons could potentially be directly affected by an eruption and ashes could affect an area with more than 20 million people (De La Cruz-Reyna and Siebe, 1997; Macías and Siebe, 2005).

The overall crustal structure beneath the MVB is relatively well studied (Campillo et al., 1996; Valdes et al., 1986; Shapiro et al., 1997). On the contrary, the crustal seismic structure beneath Popocatepetl is not well known. Receiver functions analysis by Cruz-Atienza et al. (2001), using 4 events from South America, indicates that a Low Velocity Zone may be present beneath a station located 5 km north of the crater.

The aim of this paper is to improve the knowledge of this complex volcano structure, and particularly to determine if the whole crust beneath the volcano is significantly different from the rest of the MVB. The first kilometers of crust beneath several volcanoes have been studied (e.s. Dawson et al., 1999; Laigle et al., 2000; Benz et al., 1996). Typical volcanic anomalies are low velocity zones, attributed to the presence of partial melt, or high velocity zones, due to solidified magmatic intrusions.

We concentrate on the S-wave structure, as S-wave velocities are very sensitive to temperature changes and to the presence of even small amounts of partial melt. The easiest way to get an overall picture of S-wave velocities is through surface wave analysis. However, the traditional 2-stations methods can not be used in this rather diffractive environment

as measurements would possibly be strongly biased due to local and regional diffraction (Wielandt, 1993; Friederich et al., 1995). An alternative approach is therefore to use array analysis. Such methods have been used on volcanoes, particularly for tremor source location (Métaxian et al., 2002; Almendros et al., 2002) or for shallow structure study (See for example Saccorotti et al., 2001). More details can be found in Chouet (2003) who presents a state of the art on volcano seismology.

The dispersion curve had to be measured over a wide frequency range (0.02-1 Hz) to study the overall crustal structure beneath Popocatépetl. The array configuration which was strongly influenced by topography and logistic issues was such that we could not use spatial Fourier transforms outside a very narrow frequency range. Consequently methods based on wavenumber decomposition were excluded. The use of time-domain methods was problematic as we needed a good frequency resolution.

These considerations led us to use the procedure of Pedersen et al. (2003) to measure phase velocities across the array. The assumption behind this method is that the records are constituted by one single plane wave which propagates through the array. Even though this hypothesis is most probably wrong for most individual events, it may be corrected by averaging out unwanted waves (diffraction effects, non plane waves, etc) using events from different directions. The variability between different events will also provide an error estimate on the dispersion curve. To increase frequency range and azimuthal coverage we used both teleseismic and local events.

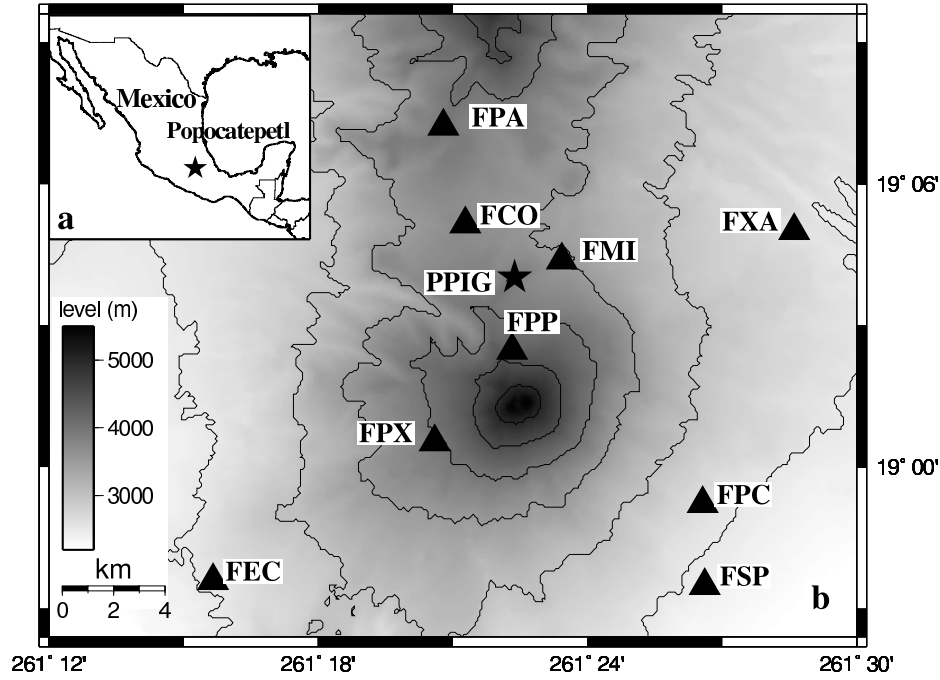
After a short description of the data and the processing methods used, we present and discuss the main results, with a comparison of the overall crustal structure beneath the volcano to that of the MVB.

## Data

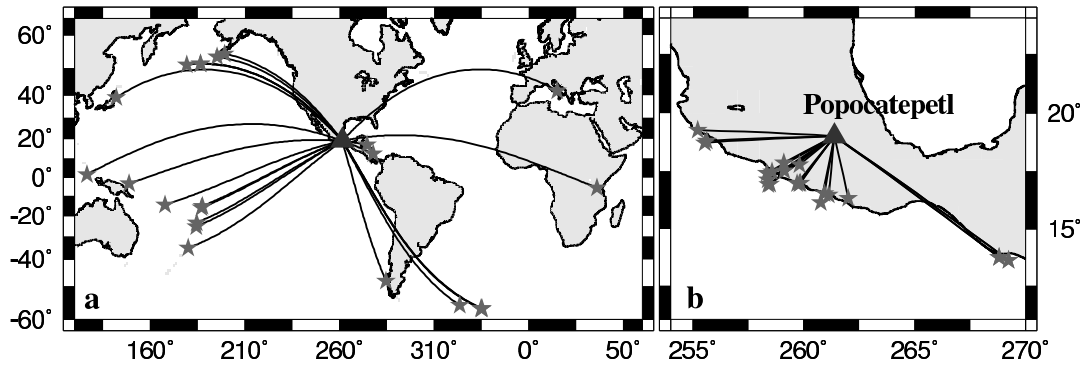
An array of nine stations (Guralp CMG 40T) with three-components broadband sensors (30-60 s cut-off period) was installed in October 2002 on the Popocatépetl volcano and continuously recorded four months of seismic events. Figure 12.b shows the array geometry. The station altitudes were between 2500 and 4300 m above sea level. The reference altitude used in this study corresponds to an average level of 3500 m a.s.l.

To obtain dispersion curves in a period range of 2 to 50 s, we chose to use both teleseismic and local events with epicentral distances between 200 and 15000 km (see fig. 13). We selected vertical components of events with a good signal to noise ratio and with well developed Rayleigh waves. The usable frequency range for the two types of events overlapped, however the long period part of the dispersion curve was mainly calculated using teleseismic events while the shorter periods were dominated by regional events.

Prior to the array analysis, we deconvolved the data with the instrument responses. The second step of this analysis was to enhance the signal-to-noise ratio through time-frequency filtering (Levshin et al., 1989). In this part of the analysis we firstly applied multiple filter to the data and identified the group velocity dispersion curve by the maximum amplitude at each frequency. We secondly integrated this curve to obtain the phase velocities and subtracted the corresponding phase  $\theta(f)$  at each frequency to obtain a non dispersive signal. A time window was then applied onto the non-dispersive wave to sup-



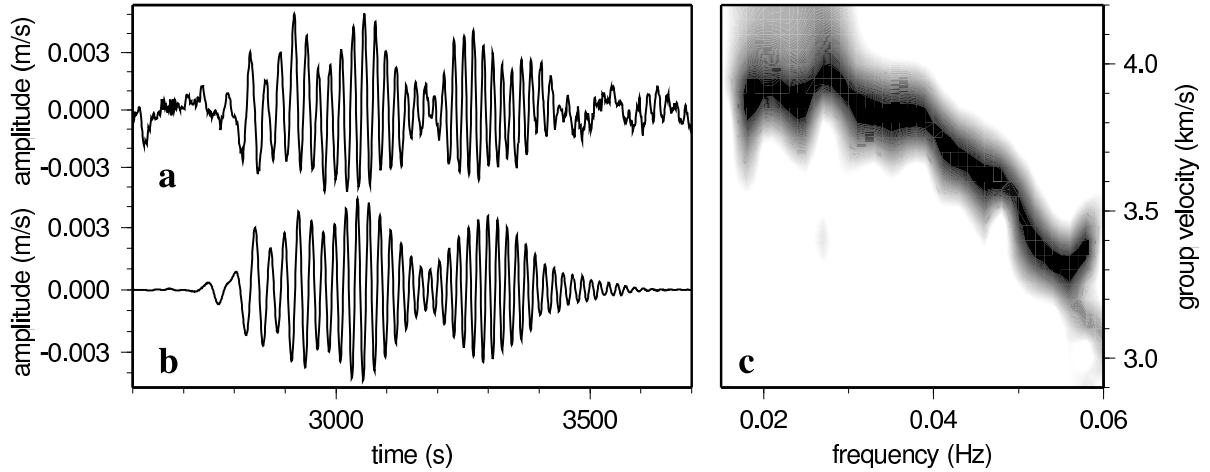
**Figure 12:** (a) Location of the Popocatépetl volcano and (b) array geometry used in the analysis. PPIG is a permanent station used by Cruz-Atienza et al. (2001) and is not used in this study.



**Figure 13:** Location and azimuth distribution of (a) teleseismic and (b) local events used in the array analysis.

press noise and the phase  $\theta(f)$  was finally added. Fig. 14 shows the comparison between an unfiltered record (14.a), with its corresponding group velocity (14.c), and filtered record (14.b) of a teleseismic event.

The time-frequency filter efficiently reduces the influence of noise, body waves and higher mode Rayleigh waves. It also makes it possible to identify and exclude events whose fundamental mode of Rayleigh waves is not well separated from other waves. 10 events were rejected during this stage. A further 12 events were excluded during the array analysis, leaving 26 events. Table 1 contains the final event list, and figure 13 shows their distribution. The number of teleseismic events was too small to ensure a correct back-azimuth distribution, but there were events from all quadrants. The regional events were mainly located in the Pacific Coast subduction and the Caribbean Islands, ensuring a back-azimuth range between N126° (South East) to N273° (West).



**Figure 14:** *Example of frequency-time filtering : a) Trace recorded at FPX, of the event at 03 :37 :42 GMT on november 03th 2002 ; b) Same trace after filtering ; c) Group velocity of this event before filtering.*

## Methodology

To measure phase velocities, we follow Pedersen et al. (2003). In this method, the phase velocity at a given frequency is obtained in two steps. Firstly, each event is analysed independently. In this step, the phase  $\phi$  of the Wiener filtering  $W(f)$  is transformed into time delays  $\Delta t$  between each pair of stations using  $\Delta t = \phi/(2\pi f)$ . The Wiener filtering in the frequency domain that we use is given by :

$$W(f) = \frac{S_{XY} * Han(f)e^{j2\pi ft_0}}{\sqrt{S_{XX} * Han(f)}\sqrt{S_{YY} * Han(f)}}$$

$S_{XX}$ ,  $S_{YY}$  and  $S_{XY}$  are respectively the Fourier transforms of the autocorrelations and intercorrelation of the two signals ,  $Han(f)$  is the Fourier transform of the Hanning function  $han(t)$  and  $t_0$  is the delay of the intercorrelation peak. \* represents the convolution product. A grid-search on velocity and back-azimuth is applied to find the best fitting plane wave that would explain the observed time delays. The fit is calculated with the L1 norm, i.e the average absolute difference between observed and predicted time delays. The knowledge of the back-azimuth makes it possible to subsequently calculate the distance between each pair of stations projected onto the slowness vector. In this way each event yields a series of (distance, delay) points.

Secondly, a bootstrap process is applied (Schorlemmer et al., 2003; Efron and Tibshirani, 1996) : 500 bootstrap samples are created by resampling the 26 events of the data set. For each bootstrap sample, the phase velocity is calculated as the inverse of the slope of the best fitting line through all the (distance, delay) points. The L1 norm is also used here to estimate the fit between observations and predictions. The points are associated with weighting which reflects how well the data fitted the assumption of a plane wave in the first step of the analysis. The final phase velocity and the associated uncertainty are obtained as the average and standard deviation over the 500 samples.

The advantages of this method are 1) stabilization of delay measurements through Wiener filtering ; 2) stabilization of back-azimuths and phase velocities through the use of the L1

norm; 3) weighting of the events in the final phase velocity calculation according to the quality of the back-azimuth estimate; 4) estimation of realistic error bars on the final dispersion curve. For more details, we refer to Pedersen et al. (2003).

The last part of this analysis consists in inverting the dispersion curves. We used the two-step inversion methods proposed by Shapiro et al. (1997). Firstly, the average dispersion curve was inverted using a linearized, classical dispersion scheme (Herrmann, 1987) to find a simple shear wave model which fitted the dispersion curve. We then used this model for a stochastic nonlinear Monte-Carlo inversion. Interface depths and shear-wave velocities were randomly changed into a new model which was kept and used in the next iteration if it fitted the dispersion curve within the error bars. This second step was repeated 5000 times. We eliminated unrealistic models by applying loose constraints on Moho depth (between 40 and 50 km depth) and on the S-wave velocity near the surface in agreement to the existing models (between 1.5 and 3 km/s). We finally calculated the average model and we verified that the corresponding dispersion curve fitted within the error bars of the observed one. The error bars of the final models were computed as the standard deviation of all the acceptable models. Quality factors and P-wave velocities were kept constant during the inversion as their influence was significantly smaller than the error bars of the dispersion curve.

## Results

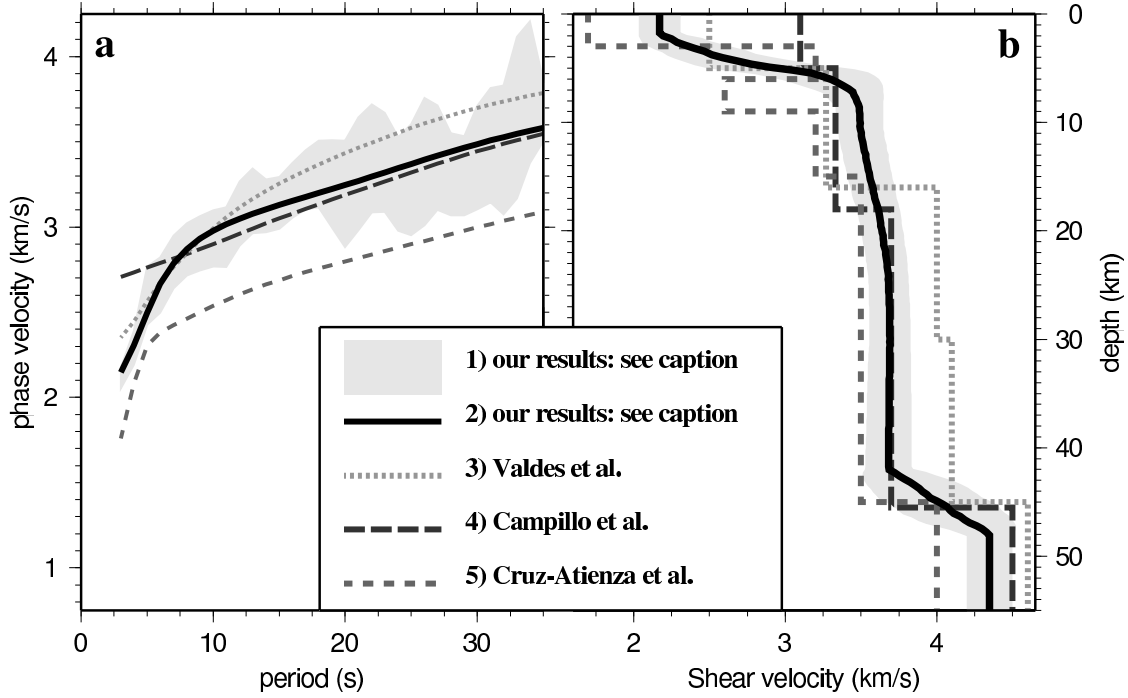
To detect differences between the crust under the Popocatépetl and the standard crust of the MVB, one can compare the equivalent shear wave velocities profiles. As surface wave inversions are non-unique it is however useful to also compare the dispersion curves which correspond to the existing models.

The models that we compare with were from : 1) Cruz-Atienza et al. (2001) who obtained their model through inversion of receiver functions using four teleseismic events from South America at station PPIG (located 5 km north of the Popocatépetl crater, see fig. 12; 2) Campillo et al. (1996) who inversed the group velocities of local events between the Guerrero Coast and Mexico City ; 3) Valdes et al. (1986) whose model is the result of a seismic refraction study in Oaxaca. We recalculated the phase velocities corresponding to these models. Shapiro et al. (1997) detected lateral variations of uppermost crustal structure within the MVB using surface wave group velocities. Due to the limited depth penetration in their study (10 km), their models are not included in our figures, but will be integrated in the discussion of the results.

## Full array

We firstly used all the stations and the 26 events to measure the 'overall dispersion curve', i.e. the average dispersion curve within the full array. The phase velocities were unstable above 35 s period and were not used in the inversions.

In Figure 15.a we compare our dispersion curve with the ones corresponding to the earth model derived by Campillo et al. (1996), Cruz-Atienza et al. (2001) and Valdes et al. (1986). For periods longer than 8 s, the Campillo et al. (1996) curve is similar to ours. For short periods, the velocities increase rapidly with period, similarly to the Cruz-Atienza et al. (2001) curve.



**Figure 15:** a : Comparison of dispersion curves :

1) Uncertainties of our observed dispersion curves ( $\pm 1$  standard deviation) 2) dispersion curve calculating with our average model (solid line); 3) Dispersion curve for Valdes et al. (1986); 4) Same for Campillo et al. (1996); 5) Same for Cruz-Atienza et al. (2001).

Fig. 4. b : Comparison of crustal models :

1) Error bars ( $\pm 1$  standard deviation, grey area) and 2) average S-wave velocity model (solid line); 3) Crustal model of Valdes et al. (1986); 4) Same for Campillo et al. (1996); 5) Same for Cruz-Atienza et al. (2001).

We verified that our inversions of the observed phase velocities were independent of which of the three reference models (see fig 15.b) was used as starting model. The results shown here are obtained by using the one of Campillo et al. (1996) as it has the advantage of fitting our data well and it only has four layers. The latter is important to allow for an efficient exploration of the parameter space in the Monte Carlo inversion.

Our preferred model (15.b) shows low shear velocities (2.2 km/s) between the surface and 3 km depth, overlying a layer with velocities increasing slowly from 3.4 to 3.7 km/s between 6 to 20 km depth. The transition between the two layers may be either a strong gradient or a sharp interface. The lower part of the crust has a constant velocity of 3.75 km/s down to Moho which is located at 45 km depth. The velocity below Moho is approximately 4.3 km/s. The lower crust and upper mantle velocity as well as the Moho depth are not well resolved due to trade-off between these parameters and because of a maximal period of 35s.

The boundary depths that we obtained are however consistent with existing models, in particular with Campillo et al. (1996). Our near surface velocities are however significantly lower and our upper crustal velocities slightly higher than those of Campillo et al. (1996), while the two models are virtually almost identical in the lower crust. The low velocity of the surface layer is relatively well constrained, however we can not exclude that the layer would be slightly thinner with slightly lower velocity. This layer, also identified by Cruz-Atienza et al. (2001), can be associated with the poorly consolidated materials of

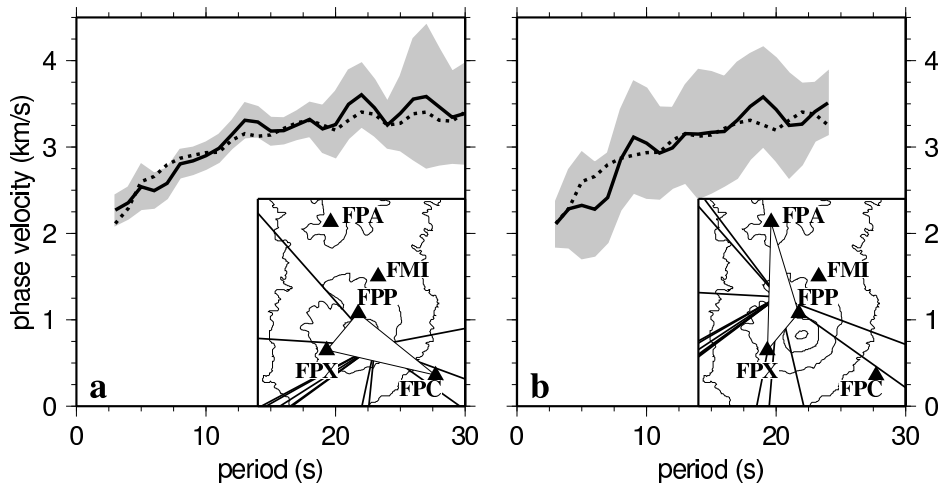


the volcano cone. Shapiro et al. (1997) find that the velocities in the upper 2 km are low beneath the southern part of the MVB where the volcanic activity is recent as compared to the northern part. Our results imply that the overall crustal structure below Popocatépetl is not significantly different from that of the MVB.

We verified whether an 6-layers initial model with a Low velocity zone between 6 and 10 km inspired by the Cruz-Atienza et al. (2001) model, would yield a significantly different result. The resulting model is not different from our preferred model (fig 15.b), in particular there is no significant Low Velocity Zone. We do not see any indication that the Low Velocity Zone observed by Cruz-Atienza et al. (2001) is a general feature of the volcano.

## Sub-arrays

To investigate lateral variations within the area, we divided the array into sub-arrays for which we calculated dispersion curves independently. The use of sub-arrays was particularly difficult as these arrays were composed of only three stations, so technical problems at any of the relevant stations would render the analysis impossible. It was possible to measure dispersion curves for the Southern (South sub-array : FPC, FPP, FPX) and the western sub-array (West sub-array : FPA, FPP, FPX).



**Figure 16:** Dispersion curves of the full array (dotted line) and the two sub-arrays (solid line) with their uncertainties (grey area) : a) South sub-array; b) West sub-array. In insert : sub-array geometry and back-azimuths of the events used.

The dispersion curves for these two sub-arrays are shown in figure 16. At the largest period the analysis is mainly based on teleseismic events, out of which only 3 or 4 events were available for the sub-array analysis. The phase velocity error bars are consequently large at long period ( $> 25$  s for the South sub-array and  $> 15$  s for the West sub-array). The dispersion curves for the South sub-array (located around the active crater) and the West sub-array was respectively measured with 13 and 14 events (see table 3). For the West sub-array, individual dispersion curves show strong oscillations between 6 and 12 s, particularly for events coming from the South or the East. These oscillations, probably due to local diffraction result in large error bar for the final dispersion curve. However, the dispersion curves beneath the two sub-arrays are not significantly different from the overall dispersion curve.

The phase velocities obtained with events for which the surface waves propagated through

date	hour	epicentre (km)	back- azimuth	West array	South array
2002/11/03	03 :37 :42	11021	316		
2002/11/04	03 :19 :18	14875	79		X
2002/11/04	10 :00 :47	342	240	X	X
2002/11/04	13 :57 :32	366	241	X	X
2002/11/05	14 :05 :07	650	273	X	X
2002/11/06	16 :02 :37	279	186	X	X
2002/11/06	16 :24 :17	321	192	X	X
2002/11/06	18 :04 :05	390	234	X	X
2002/11/07	15 :14 :06	7834	319	X	X
2002/11/08	23 :20 :41	301	168	X	X
2002/11/09	00 :14 :18	980	126	X	X
2002/11/09	06 :05 :58	7779	164		
2002/11/15	19 :58 :31	10135	150		
2002/11/20	22 :59 :14	383	233	X	X
2002/11/21	02 :53 :14	1903	111	X	X
2002/11/26	00 :48 :15	7337	319		
2002/11/26	16 :30 :59	379	236	X	X
2002/11/27	01 :35 :06	6511	323	X	
2002/12/01	02 :27 :55	10444	234	X	
2002/12/14	01 :37 :48	304	234		
2002/12/21	08 :01 :31	276	189		
2003/01/21	02 :46 :47	1024	125		
2003/01/22	19 :41 :38	607	268		
2003/01/22	20 :15 :34	618	267		
2003/01/31	15 :56 :52	275	216		
2003/02/19	03 :32 :36	6749	321		

**Table 3:** *Origine time, epicentre distance and back-azimuth of the events used for measuring the dispersion curves for the full array or with the sub-arrays (columns 5 and 6).*

the volcano before encountering the array are more fluctuating than those obtained with other events. As the majority of the events are located South and South-West of the array, the individual dispersion curves are more fluctuant with the period at the North and East sub-arrays (composed of stations FPA, FPP, FMI and FPC) than for the other sub-arrays. It was consequently not possible to calculate a stable dispersion curve for these two arrays.

The starting model for the inversion for the sub-arrays South and West is the model found with the full array, approximated by four layers. The estimated velocities are not significantly different from those of the overall model. Nevertheless, for the South array velocities are slightly smaller between 6 and 10 km depth, and the surface velocities are higher. The differences are however smaller than the error bars of the overall model.

## Discussion and Conclusion

The average crust beneath the Popocatépetl volcano appears to be similar to the MVB crust. There is therefore no indication of large scale crustal anomalies associated with Popocatépetl as compared to the MVB. We do however confirm that the lower crust in the area is likely to be associated with relatively low shear wave velocities (3.75 km/s). Close to the surface, the velocity is approximatively 2.2 km/s over at least a depth of 3 km. It probably corresponds to the poorly consolidated material of the cone (such as volcanic slags and ash and pyroclastic deposits) overlying the 2 km-thick volcanic layer

of the MVB crust (Shapiro et al., 1997).

We speculate that the oscillations observed for the sub-arrays between 6 and 12 s periods is associated with diffraction by lateral heterogeneity at 5-10 km depth as this period range corresponds to wavelengths between 16 and 36 km. To obtain strong diffraction, the heterogeneity must be of considerable size (i.e. of the order of the wavelength), as surface waves are not strongly diffracted by many small heterogeneities (Chammas et al., 2003). However, the lack of Low Velocity Zone turns down the hypothesis of a large continuous magma chamber. We speculate that either the interface located at 4 km depth in the average model fluctuate strongly, or that an abrupt lateral change takes place immediately beneath the central part of the volcano. The unresolved velocities at 5-10s period at the West and South sub-arrays indicate that future arrays should be designed so as to give good constraints at 5-10 km depth. To obtain this, more stations and a larger recording period are necessary.

More seismic events with a better azimuthal distribution would improve the smoothing and the error bars of the dispersion curves and make it possible to include receiver function analysis and coupled Rayleigh-Love inversion.

## Acknowledgement

*We are grateful to Germán Espitia-Sanchez of the Centro Nacional de Prevencion de los Desastres (CENAPRED), Marcos Galicia-López of the Instituto de Protección Civil del Estado de México, Sargento Fidel Limon of the VI Region Militar, Aida Quezada-Reyes and Raúl Arámbula-Mendoza of the Universidad Nacional Autónoma de México for their logistical support and participation in the field experiment. We also thank the local department in México of Institut de Recherche pour le Développement for its support during the field work. Funding for the experiment was provided by the Centre National de la Recherche Scientifique (PNRN-INSU 2000 and 2002), the Coordination de la Recherche Volcanologique, the Université de Savoie (BQR 2002), the ARIEL program and by the CONACYT project 41308-F. Most of the seismic stations were provided by the Réseau Accélérométrique Mobile (RAM-INSU). H. A. Pedersen received financial support from the Alexander von Humboldt Foundation. Servando de la Cruz-Reyna and an anonymous reviewers made valuable comments to improve the manuscript.*

# Bibliography

- Almendros, J., Chouet, B., Dawson, B., Huber, C., 2002. Mapping the sources of the seismic wave field at Kilauea Volcano, Hawaiï, using data recorded on multiple seismic antenna. *Bull. Seism. Soc. Am.* 92, 2333-2351.
- Arcieniega-Ceballos, A., Chouet, B.A., Dawson, P., 2000. Very long-period signals associated with vulcanian explosions at Popocatépetl Volcano, central Mexico. *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 26, 3013-3016.
- Benz, H.M., Chouet, B.A., Dawson, P.B, Lahr, J.C., Page, R.A., Hole, J.A., 1996. Three-dimensional P and S wave velocity structure of Redoubt volcano, Alaska. *J. Geophys. Res.* 101(B4), 8111-8128.
- Campillo, M., Singh, S.K., Shapiro, N., Pacheco, J., Herrmann, R.B., 1996. Crustal structure South of the Mexican Volcanic belt, based on group velocity dispersion. *Geofísica Internacional* 35, 361-370.
- Chammas, R., Abraham, O., Cote, P., Pedersen, H. A., Semblat, J. F., 2003. Characterization of Heterogeneous Soils Using Surface Waves: Homogenization and Numerical Modeling, *International Journal of Geomechanics* 3, 55-63.
- Cruz-Atienza, V.M., Pacheco, J.F., Singh, S.K., Shapiro, N.M., Valdes C., Iglesias, A., 2001. Size of Popocatépetl volcano explosions (1997-2001) from waveform inversion. *Geophys. Res. Lett.* 28, 4027-4030.
- Chouet, B., 2003. Volcano Seimology. *Pure and Applied Geophysics* 160, 739-788.
- Dawson, P.B., Chouet, B.A., Okubo, P.G., Villasenor, A., Benz, H.M., 1999. Three-dimensional velocity structure of the Kilauea caldera, Hawaii. *Geophys. Res. Lett.* 26, 2805-2808.
- De La Cruz-Reyna, S., Siebe, C., 1997. The giant Popocatépetl stirs. *Nature* 388, 227.
- Efron, B. and Tibshirani, R., 1986. Bootstrap methods for standard errors, confidence intervals and other measurements of statistical accuracy. *Statistical Science* 1, 54-77.
- Friederich, W., Wielandt, E., 1995. Interpretation of seismic surface waves in regional networks: joint estimation of wavefield geometry and local phase velocity. Method and numerical tests. *Geophys. J. Int.* 120, 731-744.
- Herrmann, R.B., 1987. Computers programmes in seismology, Volume IV: Surface waves. Saint Louis University, Missouri.
- Laigle, M., Hirn, A., Sapin, M., Lépine, J.C., Diaz, J., Gallart, J., Nicolich, R., 2000. Mount Etna dense array local earthquake P and S tomography and implications for volcanic plumbing. *J. Geophys. Res.* 105(B9), 21633-21646.

- Levshin, A.L., Yanovskaia, T.B., Lander, A.V., Bukchin, B.G., Barmin, M.P., Ratnikova, L.I. and Its, E.N., 1989. Surface waves in a vertically inhomogeneous media. In: Keilis-Borok, V.I. (Ed.), *Seismic Surface Waves in a Laterally Inhomogeneous Earth*. Kluwer, Dordrecht, pp. 131-182.
- Macías, J.L., Siebe, C., 2005. Popocatépetl crater filled to the brim: significance for hazard evaluation. *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 141, 327-330.
- Métaxian, J.-P., Lesage, P., Valette, B., 2002. Locating sources of volcanic tremor and emergent events by seismic triangulation: Application to Arenal volcano, Costa Rica. *J. Geophys. Res.* 107(B10), 2243-2261.
- Pedersen, H.A., Coutant, O., Deschamps, A., Soulage, M., Cotte, N., 2003. Measuring surface wave phase velocities beneath small broad-band arrays: tests of an improved algorithm and application to the French Alps. *Geophys. J. Int.* 154, 903-912.
- Saccorotti G., Almendros J., Carmona E., Ibáñez J.M., Del Pezzo E., 2001, Slowness Anomalies from two dense seismic arrays at Deception Island volcano, Antartica. *Bull. Seism. Soc. Am.* 91, 561-571.
- Schorlemmer, D., Neri, G., Wiemer, S., Mostaccio, A., 2003. Stability and significance tests for b-value anomalies: Example from the Tyrrhenian Sea. *Geophys. Res. Lett.* 30(16), 1835-1841.
- Shapiro, N.M., Campillo, M., Paul, A., Singh, S.K., Jongmans, D., Sanchez-Sesma, F.J., 1997. Surface wave propagation across the Mexican Volcanic Belt and the origin of the long period seismic wave amplification in the valley of Mexico. *Geophys. J. Int.* 128, 151-166.
- Valdes, C.M., Mooney, W.D., Singh, S.K., Meyer, R.P., Lomnitz, C., Luetgert, J. H., Hesley, B.T., Lewis, B.T.R., Mena, M., 1986. Crustal structure of Oaxaca, Mexico from seismic refraction measurements. *Bull. Seism. Soc. Am.* 76, 547-564.
- Wielandt, E., 1993. Propagation and structural interpretation of nonplane waves. *Geophys. J. Int.* 113, 45-53.
- Wright, R., De La Cruz-Reyna, S., Harris, A., Flynn, L., Gomez-Palacios, J.J., 2002. Infrared satellite monitoring at Popocatépetl: Explosions, exhalations, and cycle of dome Growth. *J. Geophys. Res.* 107(B8), 1029-1045.

## Annexe D: Data covariance and $H^1$ norm

The covariance function  $C_D(t, t')$  is given by:

$$C_D(t, t') = \frac{\sigma_i \sigma_j}{2\xi} e^{-\frac{|t - t'|}{\xi}} \quad (1)$$

$t$  and  $t'$  are times values which are greater than the beginning time  $t_o$  of the signal and lower than the maximum time  $t_e$ .

We define the function  $\phi(t_i - t_j) = C_D(t_i, t_j)$ . The first and second derivatives of this function are:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t) &= \frac{1}{\xi} sg(t) \phi(t) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(t) &= \frac{1}{\xi^2} \phi(t) - 2 \frac{\sigma^2}{\xi^2} \delta(t) \end{aligned} \quad (2)$$

$\delta(t)$  is the Dirac function which value is 1 for  $t = 0$  and 0 elsewhere. This covariance operator  $C_D(t_i, t_j)$  associates any function  $e(t)$  to the function  $\hat{e}(t)$

$$e(t) = \int_{t_o}^{t_e} C(t, t') \hat{e}(t') dt' \quad (3)$$

Using the equations (2) and (3),  $\hat{e}(t)$  can be expressed

$$\hat{e}(t) = \frac{1}{2\xi\sigma^2} e(t) - \frac{\xi}{2\sigma^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(t) \quad (4)$$

$$\text{and} \quad \hat{e}(t) = \int_{t_o}^{t_e} C_D^{-1}(t, t') e(t') dt' \quad (5)$$

The inverse function of  $C_D(t, t')$  is thus given by

$$C_D^{-1}(t, t') = \frac{\xi}{\sigma\sigma'} \left( \delta(t - t') - \xi \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}(t - t') \right) \quad (6)$$

The norm of an element  $e$  can be computed by

$$\| \mathbf{e} \|_D^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{e} = \int_{t_o}^{t_e} e(t) \hat{e}(t) dt \quad (7)$$

Using the definition of  $\hat{e}(t)$  (eq. 4), an integration by part and eq 2, we have

$$\begin{aligned}
 \| \mathbf{e} \|_D^2 &= \frac{1}{2\sigma\sigma'} \left( \frac{1}{\xi} \int_{t_o}^{t_e} e^2 dt - \xi \int_{t_o}^{t_e} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}(t) e(t) dt \right) \\
 &= \frac{1}{2\sigma\sigma'} \left( \frac{1}{\xi} \int_{t_o}^{t_e} e(t)^2 dt + \xi \int_{t_o}^{t_e} \left[ \frac{\partial e}{\partial t}(t) \right]^2 dt + \xi \left[ e(t_o) \frac{\partial e}{\partial t}(t_o) \right] - \xi \left[ e(t_e) \frac{\partial e}{\partial t}(t_e) \right] \right) \\
 &= \frac{1}{2\sigma\sigma'} \left( \frac{1}{\xi} \int_{t_o}^{t_e} e(t)^2 dt + \xi \int_{t_o}^{t_e} \left[ \frac{\partial e}{\partial t}(t) \right]^2 dt + \xi^2 \left[ \frac{\partial e}{\partial t}(t_o) \right]^2 - \xi^2 \left[ \frac{\partial e}{\partial t}(t_e) \right]^2 \right)
 \end{aligned} \tag{8}$$

These expressions are a sums of squares, we verify that the covariance operator defined by the covariance function  $C_D(t, t')$  is positive definite.

The derivatives of  $e(t)$  are usually weak at the beginning and the end of the signal, and the two first terms of expressions 8 are approximately of the value of  $t_e - t_o$ , which is much greater than  $\xi$ . The last two terms can be dropped, what give:

$$\| \mathbf{e} \|^2 \simeq \frac{\xi}{\sigma_i \sigma_j} \left( \frac{1}{\xi} \int_{t_1}^{t_2} [e(t)]^2 dt + \xi \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial e}{\partial t}(t) \right]^2 dt \right) \tag{9}$$

This corresponds to a norm in the space  $H^1$ , which is the sum of the usual  $L_2$  norm of the function and of the  $L_2$  norm of its derivative.

*Titre de l'ouvrage:*

**Sensibilité et inversion de formes d'ondes complètes  
en milieu poreu stratifié.**

*Auteur:*

**Louis De Barros**

*Établissement:*

Observatoire de Grenoble

Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique

*Résumé:*

La détermination des paramètres d'un milieu poreux, notamment la porosité, la perméabilité et les propriétés du fluide saturant est un enjeu important pour de multiples applications.

L'objectif principal de ce travail est d'étudier les possibilités d'estimer ces propriétés à partir des ondes sismiques réfléchies.

Après une description théorique des paramètres mécaniques et des propriétés spécifiques des ondes sismiques dans les milieux poreux, le problème direct est calculé pour un milieu poreux stratifié plan saturé par un fluide homogène. Les équations de Biot sont résolues par une méthode de réflectivité associée à une intégration en nombre d'ondes discrets. Ce programme de simulation est tout d'abord utilisé pour estimer la sensibilité des ondes réfléchies à la localisation et à la concentration de dioxyde de carbone dans un stockage géologique profond. La sensibilité de la réponse sismique aux différents paramètres du milieu poreux est ensuite établie de manière plus systématique par le calcul analytique des dérivées de Fréchet des sismogrammes et leur mise en oeuvre numérique à l'aide des fonctions de Green du milieu non perturbé.

Les applications numériques réalisées indiquent que les paramètres primordiaux à déterminer sont la porosité et la consolidation. Les opérateurs de sensibilité obtenus ont ensuite été intégrés dans un code d'inversion de formes d'ondes complètes par une approche locale basée sur la modélisation itérative des données autour d'un modèle *a priori*. La méthode de résolution employée fait appel à l'algorithme de Quasi-Newton amélioré ici par l'utilisation de la norme  $H^1$ . Les calculs d'inversion réalisés à partir de données synthétiques indiquent que les distributions de porosité et les paramètres caractérisant le solide et le fluide (densité et modules mécaniques, ou pourcentage volumique en fluide et minéral) peuvent être correctement reconstruits lorsque les autres paramètres sont bien déterminés. Cependant, l'inversion de plusieurs paramètres reste un problème difficile du fait des couplages sismiques existant entre eux. La méthode d'inversion est finalement appliquée à un jeu de données réelles acquis sur le site côtier de Maguelonne dans l'Hérault. Sans information extérieure, il est très difficile de retrouver la lithologie du site. L'utilisation de données de forages semble nécessaire pour débiter et vérifier l'inversion.

*Mots clefs:*

Ondes sismiques, Milieu poreux, Modélisation numérique, Stockage de CO<sub>2</sub>, Opérateurs de sensibilité, Inversion de formes d'ondes complètes, Quasi-Newton, Estimation des propriétés des fluides et de la lithologie